

# Entwicklung eines Sensors auf der Basis piezoelektrischer Polymerfolien zur in-situ Messung von Spannungsintensitätsfaktoren bei Ermüdungsrisswachstum

Von der Fakultät für Maschinenbau, Verfahrens- und Energietechnik  
der Technischen Universität Bergakademie Freiberg  
genehmigte

## DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur  
(Dr.-Ing.)

vorgelegt

von Dipl.-Ing. Dennis Bäcker

geboren am 24.07.1981 in Kirejewsk

Gutachter: Prof. Dr. Meinhard Kuna (Freiberg)

Prof. Dr. Dietmar Gross (Darmstadt)

Tag der Verleihung: 27. Mai 2013



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner wissenschaftlichen Tätigkeit am Institut für Mechanik und Fluidodynamik an der TU Bergakademie Freiberg.

Mein Dank gilt Prof. Dr. rer. nat. habil. Kuna für die Überlassung des Themas, freundliche kompetente fachliche Unterstützung und den gewährten persönlichen Freiraum bei der Bearbeitung und Umsetzung neuer Ideen. Ebenso bedanke ich mich bei Prof. Dr.-Ing. habil. Ricoeur und Dr.-Ing. Häusler für die offenen und zielführenden Diskussionen sowie fachkundige wissenschaftliche Betreuung.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Gross von der TU Darmstadt möchte ich sehr herzlich für das Interesse an meiner Arbeit und die Tätigkeit als Gutachter danken.

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. rer. nat. habil. Reissig für seine fachliche Ratschläge und Bemühungen, mein mathematisches Wissen zu erweitern.

Darüber hinaus danke ich den Kollegen der Arbeitsgruppe Mechanik der TU BAF und (ehemaligen) Studenten, die mich durch studentische Arbeiten unterstützt haben. Nicht zuletzt danke ich meiner lieben Familie und meinem Gott und Herrn Jesus Christus.

Freiberg, im März 2013

Dennis Bäcker



# Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	1
1.1	Stand der Forschung.....	1
1.2	Aufgabenstellung und Ziele .....	2
1.3	Physikalische Grundlagen piezo-, pyro- und ferroelektrischer Materialien.....	3
1.3.1	Dielektrizität .....	3
1.3.2	Piezoelektrizität .....	4
1.3.3	Ferroelektrizität und Ferroelastizität.....	5
1.3.4	Pyroelektrizität.....	6
1.4	PVDF als Sensorwerkstoff .....	6
2	Grundlagen .....	8
2.1	Elektromechanik.....	8
2.1.1	Elektrostatik .....	8
2.1.2	Kontinuumsmechanik .....	10
2.1.3	Materialgesetze (Thermodynamik piezoelektrischer Festkörper) .....	14
2.2	Linear-elastische Bruchmechanik .....	18
2.3	Ebene (zweidimensionale) Probleme .....	20
2.3.1	KOLOSOV-Gleichungen für isotrope Werkstoffe .....	20
2.3.2	Anwendung der konformen Abbildung .....	22
2.3.3	Transformation von KOLOSOVschen Gleichungen .....	23
2.3.4	Unendliche Ebene mit einem Riss (GRIFFITH-Riss) .....	23
2.3.5	Rissnahfeldspannungen und die WILLIAMS-Reihe .....	25
2.4	Plattenbiegung .....	27
2.4.1	Klassische Biegetheorie dünner Platten.....	28
2.4.2	Spannungsintensitätsfaktoren für Riss in einer unendliche Platte .....	31
2.4.3	Biegung Schubelastischer Platten nach MINDLIN.....	32
2.5	Inverses Problem .....	34
2.5.1	Messtechnik .....	36
2.5.2	Spannungsmessung .....	37
2.5.3	Ladungsmessung.....	37
3	Sensorkonzept für Riss in Scheiben .....	39
3.1	Analytische Vorbetrachtungen .....	39
3.1.1	Elektrische Potentialmessung .....	40
3.1.2	Ladungsmessung.....	41
3.1.3	Koordinatentransformation.....	42
3.1.4	Zusammenhang zwischen elektrischen Signalen und $K$ -Faktoren .....	43
3.2	Inverses Problem .....	44

3.2.1 Simulation von Messfehlern .....	47
3.3 Minimale Risslänge .....	49
3.4 Einfluss der Elektrodengröße .....	49
3.5 Numerische Simulationen des Systems Struktur-Sensorfolie .....	50
3.5.1 FEM-Modell .....	50
3.6 Erprobung der Messmethode am GRIFFITH-Riss .....	53
3.6.1 Theoretische Genauigkeit der Messmethode .....	53
3.6.2 Testrechnungen .....	55
4 Sensorkonzept für die Biegung von Platten mit Riss .....	62
4.1 Rissnahfeldlösung nach der KIRCHHOFF-Plattentheorie .....	62
4.2 Sensorkonzept für die schubstarre Plattentheorie (KIRCHHOFF) .....	64
4.3 Sensorkonzept für die schubelastische Plattentheorie (MINDLIN) .....	70
5 Matrixmessmethode .....	74
5.1 Verteilung der Ladung in der Folie (Kondensatormodell) .....	75
5.1.1 2,2-Messmatrix .....	75
5.1.2 $M, N$ -Messmatrix .....	77
5.2 Simulation des Ausleseverfahrens einer Messmatrix .....	79
5.2.1 2,2-Messmatrix .....	79
5.2.2 $M, N$ -Messmatrix .....	80
5.3 Einzelne Messsignale und gemessene Werte .....	81
5.4 Lösung des inversen Problems mit der Matrixmessmethode .....	82
5.4.1 Allseitiger Zug und Mixed-Mode-Belastung einer unendlichen Scheibe .....	83
6 Weg zur technischen Umsetzung des Sensorkonzeptes .....	87
Zusammenfassung .....	91
Anhang .....	93
A.1 Materialkonstanten PVDF .....	93
A.2 WILLIAMS-Koeffizienten der analytischen Lösung des GRIFFITH-Risses .....	93
A.3 WILLIAMS-Koeffizienten der analytischen Lösung bei einer unendlichen Platte mit einem Riss unter allseitiger Biegung und Torsion .....	95
A.4 Fehlerdiagramme für die Approximation der analytischen Lösung des GRIFFITH-Risses durch die WILLIAMSSche Reihenentwicklung .....	97
A.5 Rissnahfeldlösung nach der MINDLINSchen Plattentheorie .....	101
Literaturverzeichnis .....	114

# Formelzeichen und Abkürzungen

$A, a$	Fläche
$\mathbf{A}$	Koeffizientenmatrix
$a$	halbe Risslänge
$a_i$	Beschleunigungsvektor
$a_n, a_{\lambda_n-2k-1}$	Koeffizienten der Reihentwicklung, die Modus I repräsentieren
$\mathbf{B}$	Koeffizientenmatrix
$B_K, B_R$	Konstante Spannung parallel zum Rissufer bei Plattenproblemen
$\vec{B}$	magnetische Flussdichte
$b_i$	Volumenkräfte
$b_n, b_{\lambda_n-2k-1}$	Koeffizienten der Reihentwicklung, die Modus I repräsentieren
$C$	Kondensatorkapazität
$C_f$	Kapazität des Rückkoppelkondensators
$C^{\varepsilon_{ij}, E_i}$	Wärmekapazität
$c_{ijkl}, [c]$	Elastizitätstensor (komprimierte Notation $c_{ij}$ , bei konstanter dielektrischer Verschiebung $c^D$ , beim konstanten elektrischen Feld $c^E$ )
$D$	Plattenbiegesteifigkeit
$\vec{D}$	dielektrische Verschiebung
$d_{kij}, [d]$	piezoelektrische Verzerrungskoeffizienten bezogen auf das elektrische Feld (komprimierte Notation $d_{ij}$ )
$E$	Elastizitätsmodul
$\mathbf{E}_v$	Eigenvektorenmatrix
$\mathbf{E}_w$	Eigenwertematrix
$\vec{E}$	elektrische Feldstärke
$e_{ijk}, [e]$	piezoelektrische Spannungskoeffizienten bezogen auf das elektrische Feld (komprimierte Notation $e_{ij}$ )
$F$	AIRYSche Spannungsfunktion
$F_{ij}$	Deformationsgradient
$f_i$	Kraftvektor
$g_{kij}, [g]$	piezoelektrische Verzerrungskoeffizienten bezogen auf dielektrische Verschiebung (komprimierte Notation $g_{ij}$ )
$H_0$	äußeres Torsionsmoment
$\vec{H}$	magnetische Feldstärke
$H(x)$	HESSE-Matrix
$h$	spezifische elektrische Enthalpiedichte
$h_s$	spezifische Enthalpie
$h_{\text{elast}}$	elastische Enthalpiedichte
$h$	Plattendicke
$h_s$	reduzierte Plattendicke

$h_{ikl}, [h]$	piezoelektrische Spannungskoeffizienten bezogen auf dielektrische Verschiebung (komprimierte Notation $h_{ij}$ )
$I$	Einheitsmatrix
$i$	imaginäre Einheit, $i^2 = -1$ elektrischer Strom
$\vec{j}$	Stromdichte
$K$	kinetische Gesamtenergie
$K_{I,II,III}$	Spannungsintensitätsfaktoren
$K_1, K_2$	Plattenspannungsintensitätsfaktoren nach MINDLINSchen Plattentheorie
$k_1, k_2$	Plattenspannungsintensitätsfaktoren nach KIRCHHOFFSchen Plattentheorie
$k_U$	Verstärkungsfaktor
$k_{ij}$	$k_{ij}^2$ Verhältnis von gespeicherter mechanischen zur aufgenommenen elektrischen Energie
$\vec{L}$	Drehimpuls
$\vec{M}_R$	Drehmoment
$M_0$	äußeres Biegemoment
$m$	Masse
$m_p$	Schnittmomente
$\vec{n}, \vec{e}_i$	Normalenvektor
$\vec{p}$	Polarisationsvektor
$P_{ij}$	PIOLA-KIRCHHOFFScher Spannungstensor
$p_i$	pyroelektrische Koeffizientenmatrix
$p$	Flächenlast
<b>Q</b>	Matrix mit Ladungswerten
$Q$	elektrische Ladungsmenge
$Q$	Wärmestrom
$q$	spezifische Wärme
$q_p$	Querkräfte
$R$	elektrischer Widerstand Konvergenzradius
$r$	Radialkoordinate des Polarkoordinatensystems
$S, s$	Rand eines Körpers oder Integrationsgebietes
$s$	spezifische Entropie
$T$	Temperatur
$T$	konstante Spannung parallel zur Rissufer
$t$	Zeit
$\vec{t}$	Tangentenvektor
$t_i$	Spannungsvektor
$U$	innere Gesamtenergie
$U$	elektrische Spannung
$u$	spezifische innere Energie



$u_i$	Verschiebungsvektor
$V, v$	Volumen eines Körpers
$v_i$	Geschwindigkeitsvektor
$W$	elektrische/mechanische Arbeit
$w$	spezifische äußere Arbeit
$w$	Durchbiegung
$X_i, x_i$	Ortsvektor
$x, x_i, x'_i$	Koordinate auf der $x$ -Achse
$y, y_i, y'_i$	Koordinate auf der $y$ -Achse
$z$	komplexe Variable, $z = x + iy$
	Koordinate in die $z$ -Achse
$\alpha_k$	Optimierungsparameter
$\alpha_T$	Regularisierungsparameter
$\alpha_n$	Koeffizienten
$\beta$	Winkel
$\beta_n$	Koeffizienten
$\beta_{ik}, [\beta]$	dielektrischer Impermeabilitätstensor
$\delta_{ij}$	KRONECKER-Symbol
$\varepsilon_{ij}, \varepsilon_k$	Verzerrungstensor
$\varepsilon_{ijk}$	LEVI-CEVITA-Tensor
$\theta$	Temperaturdifferenz
$\kappa$	elastische Konstante
$\kappa_0$	Dielektrizitätskonstante des Vakuums
$\vec{\kappa}, \kappa_{ik}, [\kappa]$	dielektrischer Permittivitätstensor (bei konstanter Spannung $\kappa^\sigma$ , bei konstanter Dehnung $\kappa^\varepsilon$ )
$\lambda$	LAMÉ-Modul
$\lambda_{ij}$	Tensor der Temperaturspannungskoeffizienten
$\mu$	LAMÉ-Modul
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\nu_c$	CURIE-Temperatur
$\rho$	Massendichte
	Radialkoordinate des Polarkoordinatensystems
$\sigma_{ij}, \sigma_k$	CAUCHYScher Spannungstensor
$\sigma$	Zugspannung
$\tau$	Schubspannung
$\phi$	elektrisches Potential
$\phi, \chi, \psi,$	komplexe Spannungsfunktionen
$\Omega, \Phi, \Psi$	
$\varphi$	Winkel im Polarkoordinatensystem
$\omega$	elektrische Ladungsdichte

$\omega_r, \omega_\varphi$	Verdrehungswinkel der Plattenquerschnitte
$\vec{\nabla}$	Nabla-Operator
$\Delta$	Laplace-Operator
$(..)^T$	Transponierte einer Matrix
$(\dot{..})$	Ableitung nach der Zeit
$\overline{(..)}$	Konjugiert komplexe Größe
$\det(..)$	Determinante
$\text{diag}(..)$	Diagonalmatrix
$\Re(..)$	Realanteil einer komplexen Größe
$\Im(..)$	Imaginäranteil einer komplexen Größe
$\Gamma(..)$	Gamma-Funktion
DMS	Dehnmessstreifen
EMFIT	Piezoelektrischer Kunststoffschaum
PEN	Polyethylenaphthalat
PET	Polyethylenterephthalat
PNN	Bleinickelniobat
PP	Polypropylen
PVDF	Polyvinylidenfluorid
PZT	Bleizirkonattitanat

# 1 Einleitung

## 1.1 Stand der Forschung

Regelmäßige Inspektionen von Ermüdungsrissen an komplizierten Tragwerken, Luftfahrtstrukturen oder Windkraftanlagen sind aufwendig und oft teuer. Eine Vorhersage des Risswachstums auf der Basis von Berechnungen erweist sich häufig als problematisch. Insbesondere sind mangelnde Informationen über stochastische Lastkollektive (z. B. Windkraftanlagen [1]) eine Ursache für die ungenaue Abschätzung der Wachstumsraten von Ermüdungsrissen. Eine technische Überwachung rissbehafteter Strukturen ist demzufolge erforderlich und garantiert die Sicherheit der technischen Anlagen.

Die Bewertungsmethoden von Rissen lassen sich in zwei Gruppen unterteilen: (\*) Erkennung von Rissen und deren Größe und (\*\*) bei bekannter Risslage Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren. In der ersten Gruppe (\*) werden die Überwachungsphasen anhand materialabhängiger Risswachstumsgesetzen und numerischen Beanspruchungsanalysen festgelegt. Dazu stehen unterschiedliche physikalische Effekte zu Verfügung [2]. Insbesondere werden die Wechselwirkungen zwischen hochfrequenten mechanischen Wellen (Oberflächen-, LAMB-, RAYLEIGHwellen) und dem Riss untersucht. Die Anregung erfolgt entweder mit Hilfe piezoelektrischer [3,4,5] oder auch magnetostriktiver [6,7] Komponenten. Ein anderes Verfahren liefert die Risslänge mit Hilfe eines Dehnungsaufnehmers bei Kenntnis der Belastung und der Rissposition [8,9].

Bei der zweiten Gruppe sollen die komplizierten Berechnungsanalysen der ersten Gruppe durch ständig weiterentwickelte Messmethoden ersetzt werden und eine Langzeitüberwachung ermöglichen. Eine weitverbreitete Methode zur Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren erfolgt auf der Basis von Dehnmessstreifen (DMS) [10,11,12]. Trotz der Möglichkeit der Überwachung von Strukturen im Betrieb kann keine hohe Ortsauflösung erreicht werden. Insbesondere ist dann ein hoher Verkabelungsaufwand erforderlich. Neben dem DMS-Verfahren existieren auch andere Verfahren wie photoelastische Methoden [13,14], Laserinterferometrie [15], Kaustikenverfahren [16], thermoelastische Spannungsmethode [17], die weniger für die Langzeitüberwachung geeignet sind. Die experimentelle Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren lässt sich mit Hilfe der Bildverarbeitungstechnik realisieren [18,19]. Dabei werden die Aufnahmen des Risswachstums korreliert und die Rissparameter bestimmt. Eine weitere Methode zur Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren basiert auf dem Auftreten der Potentialdifferenzen (ACPD) am Riss beim Fluss von hochfrequentem Wechselstrom [20]. Eine Alternative zu dem konventionellen DMS-Verfahren bieten die piezoelektrischen Polymerfolien. Eine Methode, die Spannungsintensitätsfaktoren mit Hilfe dieser Folien zu bestimmen, findet man bei FUJIMOTO [21]. Dabei werden drei mit Elektroden versehene piezoelektrische Elemente unmittelbar neben den Riss auf die Bauteiloberfläche geklebt (Bild 1b). Die durch die auftretenden Verzerrungen induzierten elektrischen Signale sind ein Maß für die Belastung des Risses. Somit erfolgt die Bestimmung der beiden Spannungsintensitätsfaktoren ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ) und die  $T$ -Spannung unter quasistatischer Mixed-Mode Beanspruchung. Die Position des Risses wird als bekannt vorausgesetzt. Da die piezoelektrische Folie orthotrop ist, werden zwei

Folienlagen jeweils um  $90^\circ$  zueinander versetzt aufgeklebt. In einer früheren Arbeit [22] werden nur zwei piezoelektrische Keramikelemente ( $\text{PbTiO}_3 \cdot \text{PbZrO}_3$ ) verwendet und somit nur die  $K_I$ - und  $K_{II}$ -Faktoren bestimmt (Bild 1a). Nachteile dieser Methode sind: aufgrund der großflächigen Elektroden wird das Signal über eine relativ große Fläche integriert, wodurch keine orts aufgelösten Messungen möglich sind; es werden nur die  $K$ -Faktoren sowie die  $T$ -Spannung beim Einsatz von drei Elektroden bestimmt; die Rissposition muss bekannt sein. Aus den Arbeiten geht hervor, dass eine Abweichung zwischen den Mess- und Sollwerten von einigen Prozent erreichbar ist, wobei der  $K_{II}$ -Faktor einen größeren Fehler als  $K_I$  aufweist. Zum Zweck der Optimierung des Sensors wie Anordnung und Elektrodengröße wurden keine numerischen Simulationen durchgeführt.

Außer [21,22] sind keine entsprechenden Arbeiten zur  $K$ -Faktor Bestimmung bekannt.

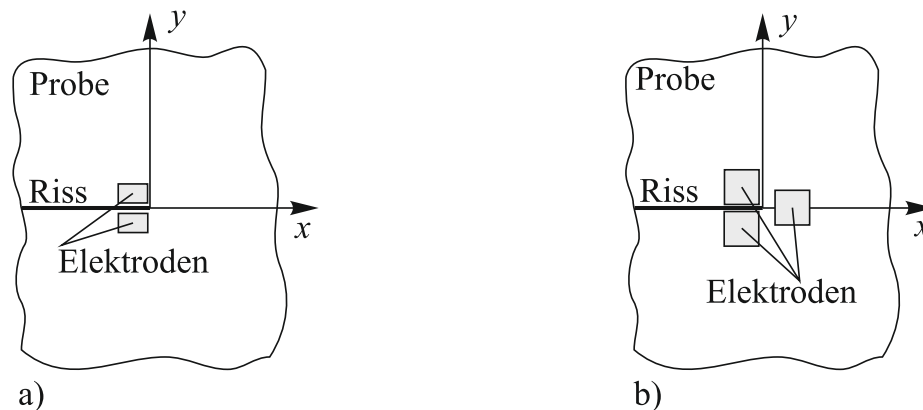


Bild 1: Position der piezoelektrischer Elemente (a) aus [22] bzw. (b) aus [21]

## 1.2 Aufgabenstellung und Ziele

Das Ziel dieser Arbeit ist, ein neues Sensorkonzept für die in-situ Langzeitüberwachung der Struktur zur Bewertung von Ermüdungsrissen und zur Vorhersage der Restlebensdauer zu entwickeln. Dabei erfolgt zum einen die Bestimmung der Lage von Rissen und gleichzeitig wird zum anderen der Beanspruchungszustand an der Risspitze quantifiziert. Auf der Basis von dünnen piezoelektrischen Polymerfolien (Polyvinylidenfluorid PVDF) bietet das Konzept einen effizienten, kostengünstigen und leicht auf beliebig gekrümmte Oberflächen zu applizierenden Sensor. Somit soll die Anwendung im Bereich der Fahrzeug-, der Luft- und Raumfahrttechnik gewährleistet werden.

Anders als bei Fujimoto [21] wird nur eine orthotrope PVDF Folie verwendet. Hierzu wird die Folie mit der Strukturoberfläche verklebt. Die an Elektroden abgegriffenen elektrischen Signale sind ein Maß für die Verzerrungen an der Oberfläche des Bauteils und ermöglichen die Berechnung der bruchmechanischen Größen am Riss. Im Falle der fortschreitenden Ermüdungsrisse wird die Risspitzenposition als unbekannt vorausgesetzt. Neben den  $K$ -Faktoren sollen weitere Terme der höheren Ordnung zur genaueren Beschreibung des Spannungsfeldes in endlicher Entfernung zur Risspitze berücksichtigt werden. Aus der Kombination der Materialgesetze und des Spannungsfeldes um die Risspitze lässt sich ein Zusammenhang zwischen den generierten elektrischen Signalen in Abhängigkeit der Lage zur Risspitze und den  $K$ -Faktoren herleiten. Somit bedarf die Bestimmung der Risspitzenlage und die Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren mindestens genauso viele Elektroden, wie die Anzahl der Unbekannten ist. Aufgrund der Nichtlinearität der

Beziehungen existiert eine Lösungsmannigfaltigkeit, wodurch weitere Messpunkte in die Auswertung einbezogen werden müssen. Das Sensorkonzept soll auf scheiben- und plattenartigen Strukturen anwendbar sein, wobei unterschiedliche Theorien der Festigkeitslehre zu Grunde liegen. Die dynamischen Belastungsfälle werden als aufeinander folgende quasistatische Vorgänge betrachtet, wodurch bei der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems die Anfangswerte für den aktuellen Schritt der Lösung aus dem vorigen Schritt entsprechen. Somit besteht nur beim ersten Schritt das Problem der Wahl der geeigneten Startwerte für die Lösung des Gleichungssystems. Durch die Anwendung des Sensorkonzeptes auf die realen Bauteile wäre ein wesentlicher Fortschritt zur Überwachung der Sicherheit technischer Anlagen und Konstruktionen erbracht.

### 1.3 Physikalische Grundlagen piezo-, pyro- und ferroelektrischer Materialien

Die piezoelektrischen Materialien bieten dank ihrer speziellen Eigenschaften ein breites Feld für die technische Anwendung. Die Besonderheit dieser Materialien liegt in der Eigenschaft, auf ein äußeres elektrisches Feld mit mechanischen Dehnungen zu reagieren oder die elektrischen Signale unter mechanischer Belastung selbst zu erzeugen [23]. Die Entdeckung dieser Eigenschaften an den in der Natur vorkommenden Einkristall-Mineralien (Turmalin, Quarz) geht auf die Gebrüder CURIE ca. 1880 zurück. Die spätere Entdeckung des piezoelektrischen Effekts an der polykristallinen Keramik wie Barium-Titanat ( $\text{BaTiO}_3$ ) und Blei-Titanat ( $\text{PbTiO}_3$ ) erweiterte den technischen Einsatz von Piezoelektrika. Man erreichte eine sehr gute chemische Resistenz und freie Formgebung dieser Materialien. Weiterer Vorteil ist natürlich die kostengünstige Herstellung der Piezokeramiken. Neben der Piezokeramik sind auch piezoelektrische Kunststoffe wie Polyvinylidenfluorid (PVDF) bekannt [24,25,26]. Die Flexibilität der Kunststoffe bietet mehr Anwendungsmöglichkeiten als die der piezokeramischen Werkstoffe. Außerdem besitzt PVDF sehr hohe Elastizität und ein niedriges spezifisches Gewicht. Durch die Entdeckung des piezoelektrischen Effektes an den Kunststoffschäumen, [27] z. B. EMFIT, verspricht man sich verbesserte piezoelektrische Eigenschaften sowie die Erweiterung des Einsatzfeldes. Die piezoelektrischen Eigenschaften erklärt man in der Besonderheit der Kristallstruktur ohne Symmetriezentrum. Damit kann der piezoelektrische Effekt nur bei nichtisotropen dielektrischen Materialien auftreten.

#### 1.3.1 Dielektrizität

Die Dielektrika haben im Gegensatz zu Leitern keine freibeweglichen Ladungen und sind somit Isolatoren. Das ist die Voraussetzung für die Durchlässigkeit des elektrischen Feldes. Beim Anlegen des äußeren elektrischen Feldes  $\vec{E}$  kommt es in Nichtleitern zu einer Verschiebung der Ladungsschwerpunkte in einem Atom oder Molekül bzw. einer dielektrischen Verschiebung  $\vec{D}$ . Auf diese Weise bilden sich im Isolator elektrische Dipole heraus [28]. Dieses Verhalten bezeichnet man als Polarisation und man definiert dementsprechend einen Polarisationsvektor  $\vec{P}$ , dessen Richtung nicht immer mit der Richtung des elektrischen Feldes, wie das im Fall der Anisotropie ist, übereinstimmt. In einigen Materialien liegt auch ohne ein von außen angelegtem elektrischen Feld

permanente Polarität, die als auch spontane Polarisierung bezeichnet wird, vor. Von Interesse sind diejenigen Dielektrika, die eine Kristallstruktur aufweisen. In Bezug auf die Orientierung der Kristallachsen unterscheidet man zwischen Einkristallen und Polykristallen. Wie schon der Name sagt, besitzen die einkristallinen Körper einheitliche Kristallachsenorientierung. Im Gegensatz dazu bestehen Polykristalline aus vielen Einzelkristallen, deren Orientierung sich vom Nachbarkorn unterscheidet, die längs der Korngrenze aneinander gebunden sind. Die physikalischen Eigenschaften der Kristalle hängen von dem Typ des Kristallgitters ab. Alle Kristalle können symmetriebezogen in sieben Kristallsysteme (triklin, monoklin, trigonal, ...) aufgegliedert werden. Jedes Kristallsystem besitzt eine charakteristische Punktgruppensymmetrie, die in 32 Punktgruppen bzw. Kristallklassen eingeteilt werden kann [29]. Zehn davon sind die sogenannten polaren Kristallklassen. Allerdings lässt sich die Polarisierung nicht ohne weiteres makroskopisch beobachten, da die freien Ladungen aus der Umgebung einen Ladungsaustausch verursachen.

### 1.3.2 Piezoelektrizität

Erfolgt eine Verschiebung der positiven und negativen Ladungsschwerpunkte ohne Anlegen des äußeren elektrischen Feldes, so entsteht ein elektrischer Dipol bzw. spontane Polarisierung. Das geschieht unter dem Einfluss der mechanischen Deformationen und man bezeichnet es als direkten piezoelektrischen Effekt. Umgekehrt bezeichnet man es als inversen piezoelektrischen Effekt, wenn ein Kristall unter dem äußeren elektrischen Feld Deformationen erfährt. Die Voraussetzung dafür kann eine polare Einheitszelle oder das Fehlen eines Inversionszentrums im Kristall sein. Das ist zum Beispiel bei den Materialien, die eine PEROWSKIT-Struktur mit der Formel  $A^{2+}B^{4+}O_3^{2-}$  aufweisen (Bild 2), der Fall [30]. Hier sind  $A^{2+}$  zweifach positiv geladene große Ionen (z. B.  $Ba^{2+}$ ,  $Pb^{2+}$ ) auf den Eckpositionen,  $B^{4+}$  ist ein vierfach positiv geladenes Ion (z. B.  $Ti^{4+}$ ,  $Zr^{4+}$ ,  $Sn^{4+}$ ) in der Mitte der Einheitszelle und  $O_3^{2-}$  sind die Sauerstoffionen auf den Seitenmitten. Diese Materialien bestehen oberhalb der CURIE-Temperatur  $v_c$  aus einem kubischen Gitter. In dieser Konfiguration fallen die negativen und positiven Ladungsschwerpunkte zusammen. Damit sind auch keine Dipole vorhanden. Bei der Temperatur unter der  $v_c$  nimmt die Einheitszelle tetragonale Gestalt an. Hier liegen die Ladungsschwerpunkte nicht mehr zusammen und es bildet sich ein elektrischer Dipol. Die häufigsten verwendeten piezoelektrischen Materialien in der Technik mit dieser Kristallstruktur sind Barium-Titanat und Bleizirkonattitanat  $Pb[ZrTi]O_3$  (PZT). Man versucht gezielt die Mischkeramiken zu erzeugen, um die höhere  $v_c$  sowie den höheren Kopplungsfaktor  $k_{ij}$  zu erreichen. Der  $k_{ij}^2$  Faktor charakterisiert in einem Piezoelektrika das Verhältnis von gespeicherter mechanischen zur aufgenommenen elektrischen Energie. Für  $Pb[ZrTi]O_3$  konnte  $v_c = 350^\circ C$  sowie  $k_{33} \approx 0,5$  erreicht werden. Weitere Entwicklungen gehen in Richtung Komplexkeramiken durch Dotieren mit Zusatzstoffen, wie Zusammensetzungen aus dem ternären Mischkristallsystem Pb-Ni (PNN)-PZT [31].

In der polykristallinen Keramik liegt die Orientierung der Kristallite statistisch verteilt. Aus diesem Grund erfolgt am Ende des Herstellungsverfahrens die Polarisierung des Materials in die gewünschte Richtung. Dabei wird das Material einem starken elektrischen Feld etwas unterhalb der CURIE -Temperatur ausgesetzt. Hierdurch richten sich die Dipole entlang der Polarisationsachse

aus. Nach dem Abkühlen und Abschalten des elektrischen Feldes behalten die Dipolmomente ihre Richtung etwa bei.

Außer der piezoelektrischen Keramik sind noch teilkristalline piezoelektrische Kunststoffe, wie Polyvinylidenfluorid (PVDF) und seine Co-Polymere, bekannt [32]. Aufgrund hervorragender mechanischer und piezoelektrischer Eigenschaften fand PVDF raschen Einzug in die technische Anwendung (z. B. als Dehnungssensor [33]). Näheres zu PVDF als Sensorwerkstoff wird im Kapitel 1.4 beschrieben. Eine weitere Klasse der Piezoelektrika bilden neu entwickelte poröse Kunststoffe wie Polypropylen (PP) [34], Polyethylenterephthalat (PET), Polyethylenaphthalat (PEN). Trotz der hervorragenden Eigenschaften ist eine breite technische Anwendung durch die relativ kleine Arbeitstemperatur (z. B. PP) bis maximal  $+50^{\circ}\text{C}$  begrenzt. Zu den Vorteilen gegenüber PVDF gibt man die sehr kleine Dichte sowie deutlich höhere elektromechanische Eigenschaften an. Der piezoelektrische Effekt im Schaumkunststoff tritt durch Deformationen der Hohlräume auf, die als Träger der getrennten negativen und positiven Ladungen an den gegenüberliegenden Oberflächen bereitstehen.

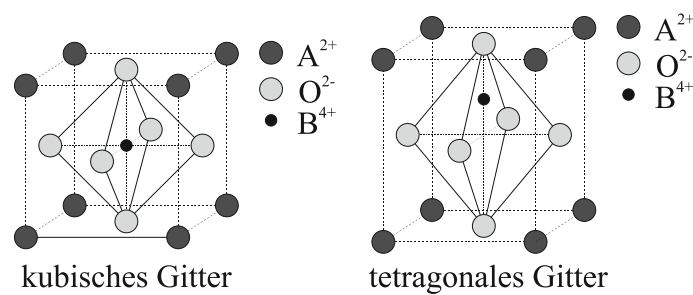


Bild 2: Kristall mit PEROWSKIT-Struktur; kubisches Gitter mit Symmetriezentrum; tetragonales Gitter ohne Symmetriezentrum

Somit lassen sich Poren mit elektrischen Dipolen vergleichen. Die Änderung des Abstandes zwischen den Ladungen ruft eine Änderung der Polarisierung hervor. Somit werden solche Schäume als piezoelektrisch eingestuft, deren Eigenschaften jedoch auf anderen physikalischen Effekten beruhen.

Außer dem longitudinalen Piezoeffekt, wobei die Last in Richtung der Polarisierung wirkt, existiert noch ein transversaler Effekt - durch das Anlegen der Last senkrecht zur Polarisationsachse. Der piezoelektrische Effekt fällt dabei deutlich kleiner als beim longitudinalen aus.

### 1.3.3 Ferroelektrizität und Ferroelastizität

Einige piezoelektrische Materialien weisen den so genannten ferroelektrischen und ferroelastischen Effekt auf. Beim ferroelektrischen Effekt erfolgt eine Änderung der Richtung der spontanen Polarisierung unter Wirkung eines elektrischen Feldes. Analog dazu bezeichnet man die Änderung der Polungsrichtung unter Wirkung einer äußeren mechanischen Last als ferroelastischen Effekt. Diese Effekte treten erst beim Überschreiten einer bestimmten elektrischen bzw. mechanischen Lastgrenze auf und sind irreversibler Art, d.h., dass der neue Zustand nach Aufhebung der äußeren Last bestehen bleibt. In einem solchen Fall nennt man eine Änderung der Polarisationsrichtung das Umklappen, wobei man auch verschiedene Umklappvarianten unterscheidet ( $\pm 90^{\circ}$ ,  $180^{\circ}$ ) [35]. Bei

polykristallinen Piezoelektrika bestehen Domänen aus Bereichen mit einheitlicher Polarisationsrichtung, wobei sich die Richtung von Domäne zu Domäne unterscheidet. Auf Grund der ferroelektrischen Eigenschaften der polykristallinen Körper lässt sich die statistische Verteilung der Polarisationsrichtung durch das Anlegen eines starken elektrischen Feldes in Richtung des Feldes umorientieren. Durch auftretende Eigenspannungen oder Gebundenheit an eine bestimmte Vorzugsrichtung im Gefüge klappen allerdings einige Elementarzellen nach dem Abschalten des Feldes zurück. Dadurch bleiben nicht alle Dipolmomente in Feldrichtung stehen und die auf diese Weise eingestellte Polarisation wird als remanente Polarisation bezeichnet. Dieser Vorgang lässt sich durch das Anlegen eines Feldes in entgegengesetzte Richtung wiederholen. Dieser Effekt lässt sich schließlich in einer für Ferroelektrika typischen Hystereseschleife, die die dielektrische Verschiebung als Funktion der angelegten Feldstärke beschreibt, abbilden. Ebenso kann die Dehnung in Abhängigkeit vom elektrischen Feld in der so genannten Schmetterlingskurve dargestellt werden. Die beiden Kurvendarstellungen werden hier nicht aufgeführt und sind in jeder Fachliteratur zur ferroelektrischen Keramik zu finden (z. B. [36,37]). Ein typischer Vertreter der ferroelektrischen Polymere ist das schon früher erwähnte PVDF-Material. Die ferroelektrischen Eigenschaften verdankt PVDF der stark polaren  $\beta$ -Phase. Die zufällige Verteilung der spontanen Polarisation in verschiedenen Kristallen wird durch ein starkes äußeres elektrisches Feld nach den Feldlinien ausgerichtet, wobei die Kettenmoleküle sich um die Kettenachse drehen. Die piezoelektrischen Polymer-schäume bilden als Ferroelektrete eine neue Klasse. Diese bestehen aus Polymeren und weisen gleichzeitig eine zelluläre Struktur auf. Eine umfassende Abhandlung zur dieser Thematik findet man zum Beispiel bei GERHARD-MULTHAUPT [27].

### 1.3.4 Pyroelektrizität

Tritt bei einer Temperaturänderung eine Änderung der spontanen Polarisation auf, so bezeichnet man diese Materialeigenschaft als pyroelektrisch. Der pyroelektrische Effekt wurde zuerst von AEPINUS bei Turmalin beobachtet. Wie auch beim piezoelektrischen Effekt lassen sich in Folge der Temperaturschwankungen Oberflächenladungen messen [38,39]. Der pyroelektrische Effekt wurde viel später auch an anderen Stoffen, wie Lithiumniobat, Lithiumtantalat, PZT, Quarz sowie PVDF nachgewiesen. Die hohe Empfindlichkeit gegenüber den Temperaturdifferenzen nutzt man für die Konstruktion von Wärmedetektoren. Häufiges Beispiel sind die so genannten Bewegungsmelder. Da alle pyroelektrischen Materialien auch Piezoelektrika sind, können sich beide Effekte überlagern. Daher ist es oftmals schwierig, beide Effekte voneinander zu trennen und es bedarf dazu spezieller Techniken, z. B. zusätzliche Temperaturüberwachung.

## 1.4 PVDF als Sensorwerkstoff

Polyvinylidenfluorid (PVDF) bietet effektive Anwendungsmöglichkeiten als Wandler oder Sensor. Das chemische Basismolekül  $-(\text{CH}_2\text{CF}_2)_n-$  besitzt eine starke Elektronegativität des Fluors gegenüber dem Kohlenstoff, dabei sind die  $\text{CF}_2$  Dipole senkrecht zur Kettenachse angeordnet (Bild 3), wodurch in der  $\beta$ -Modifikation des PVDF, im Gegensatz zu anderen eigenen Modifikationen wie  $\alpha$ ,  $\alpha_p$  und  $\gamma$ , eine maximale Polarisation erreicht wird [32]. Makroskopisch piezoelektrische



Eigenschaften erlangt der polymere Werkstoff durch den Polungsvorgang, bei dem zumeist eine mechanische Streckung einem elektrischen Feld in Dickenrichtung überlagert wird. Die Ursache für den piezoelektrischen Effekt begründet man in der starken Elektronegativität des Fluors gegenüber dem Kohlenstoff. Die piezo- und dielektrischen Eigenschaften des PVDF sind mit denen keramischer Piezoelektrika vergleichbar, die mechanischen Eigenschaften unterscheiden sich jedoch deutlich. Aufgrund der fertigungsbedingten Anisotropie in der  $x$ - $y$ -Ebene liegt orthotropes Materialverhalten vor, wobei der Polungsvektor in Dickenrichtung zeigt. Der kleine Elastizitätsmodul sowie die extrem geringe Sensormasse erschließen gegenüber piezoelektrischen Keramiken neue Anwendungsfelder. Durch die einfache Klebmontage der Folie und dank der hohen Nachgiebigkeit besteht die Möglichkeit der Aufbringung auf beliebig gekrümmte Bauteiloberflächen. Der Temperaturbereich für die Anwendung von PVDF-Folien in der Aktorik und Sensorik liegt zwischen  $-70^{\circ}\text{C}$  und  $+90^{\circ}\text{C}$ . Allerdings weist PVDF einen ausgeprägten pyroelektrischen Effekt auf. Die daraus resultierende hohe Temperaturempfindlichkeit muss bei Messungen beachtet werden. Außerdem muss bei Langzeiteinsatz der Folie der Alterungsprozess bzw. Abnahme der piezoelektrischen Eigenschaften berücksichtigt werden.

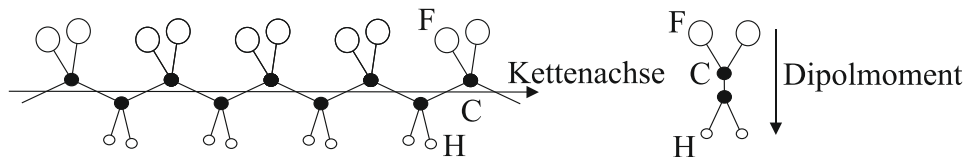


Bild 3: PVDF Molekül in  $\beta$ -Modifikation

Die Materialkonstanten des PVDF wurden [40] entnommen und vor dem Hintergrund einer thermodynamisch konsistenten Materialmodellierung mit Verzerrungen und elektrischer Feldstärke als unabhängigen Variablen transformiert (Anhang A.1):

$$\begin{aligned} c^E &= c^D (I + g^T (\kappa^\sigma)^T g c^D)^{-1}, \\ \kappa^E &= \kappa^\sigma - \kappa^\sigma g c^E g^T (\kappa^\sigma)^T, \\ e &= \kappa^\sigma g c^E. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Die Messungen mit der PVDF Folie sind auf Grund instationäre Abläufe, wie der Einfluss freier Ladungen aus der Umgebung, in der Regel auf dynamische Belastungsfälle begrenzt, wobei die Frequenz bis zu 0,1 Hz möglich ist. Die Erweiterung des Signalbereiches auf quasistationäre Lasten bis zu 0,001 Hz ist mit den entsprechenden digitalen Signalkorrekturverfahren erreichbar. Ebenso sind die Folien vom Hersteller in beliebigen Abmessungen mit der Möglichkeit verschiedener Elektrodenbeschichtung (Kupfer, Gold) verfügbar. Durch spezielle Strukturierung der Folienbeschichtung erlaubt die PVDF-Folie ferner die Konstruktion komplexer Multi-Sensorarrays, wodurch eine hohe Ortsauflösung erreicht werden kann.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Elektromechanik

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Beziehungen der Kontinuumsmechanik und Elektrostatik vorgestellt und nur auf die in dieser Arbeit benötigten Grundlagen zur Beschreibung der piezoelektrischen Werkstoffe begrenzt. Die phänomenologische Beschreibung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen erfolgt in den von MAXWELL begründeten Gleichungen. In der theoretischen Mechanik leitet man aus einfachen Annahmen Differentialgleichungen zur Beschreibung komplexer Vorgänge ab. Begrenzt man sich auf die Elastomechanik, die auf der Theorie infinitesimal kleiner Deformationen und linear-elastischen Materialverhaltens basiert, so lassen sich einfache Zusammenhänge für das Werkstoffverhalten ableiten. Die Betrachtung der thermodynamischen Potentiale liefert anschließend einen Zusammenhang zwischen mechanischen und elektrischen Feldgrößen. Auch die Temperatureinflüsse können in den konstitutiven Materialgesetzen berücksichtigt werden. Im Weiteren soll die Annahme der infinitesimal kleinen Deformationen und des linear-elastischen Materialverhaltens beibehalten werden.

#### 2.1.1 Elektrostatik

Die MAXWELLSchen Gleichungen bilden die Basis für die mathematische Beschreibung der elektrischen und magnetischen Felder [41,42]. In wenigen Gleichungen kann die klassische Elektrodynamik verständlich gemacht werden. Dabei werden sie in globaler oder lokaler Form bzw. in Integralform oder Differentialform dargestellt. Die Darstellungsform dient zur Beschreibung entweder der räumliche Feldgebiete oder einzelner lokaler Punkte. So lauten das FARADEYSche Induktionsgesetz (2.1) sowie das AMPERESche Durchflutungsgesetz (2.2) in Integralform:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = - \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (2.1)$$

$$\iint_A \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) \cdot d\vec{A} = - \oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s}. \quad (2.2)$$

Hierbei kennzeichnet  $\vec{B}$  die magnetische Flussdichte,  $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\vec{D}$  die dielektrische Verschiebung,  $\vec{j}$  die Stromdichte und  $\vec{H}$  die magnetische Feldstärke.  $d\vec{A}$  ist ein infinitesimales Flächenelement  $A$  mit der Normale  $\vec{n}$  und  $d\vec{s}$  ist ein infinitesimales Teilstück einer geschlossenen Kurve  $S$  mit der Tangente  $\vec{t}$ . Die differenzielle Darstellung der MAXWELLSchen Gleichungen bekommt man durch Anwendung des Integralsatzes von STOKES auf (2.1) und (2.2). Daraus folgt:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} = \text{rot } \vec{H}. \quad (2.4)$$

Die weiteren Beziehungen können durch Betrachtung eines Punktes, wobei  $d\vec{s}$  zu null wird und das Oberflächenintegral nicht verschwindet, gewonnen werden. Eine Integration der Gl. (2.1) und (2.2) über die Zeit liefert schließlich:

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (2.5)$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} + \int \oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} dt = 0. \quad (2.6)$$

Die zeitliche Änderung der Ladungsmenge  $Q$  in einem Integrationsvolumen kann durch Zu- oder Abfließen des Stromes erfolgen. Führt man die Volumenladungsdichte  $\omega_v$  der frei beweglichen Ladungsträger ein, dann folgt dementsprechend die sogenannte Kontinuitätsgleichung in Integralform:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \omega_v dV + \oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (2.7)$$

Differenziert man die Gl. (2.6) nach der Zeit und vergleicht mit der Gl. (2.7), erhält man die Integralform des COULOMBSchen Gesetzes:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint \omega_v dV = Q. \quad (2.8)$$

Die differenzielle Form der Gl. (2.8) sowie (2.5) lässt sich mit Hilfe des Integralsatzes von GAUSS berechnen zu:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \omega_v. \quad (2.10)$$

Die hergeleiteten differenziellen Beziehungen veranschaulichen am besten die Phänomene der elektrischen und magnetischen Erscheinungen. Die Gl. (2.3) besagt, dass ein elektrisches Wirbelfeld in Folge der Änderung des magnetischen Feldes entsteht. Analog dazu wird das magnetische Wirbelfeld Gl. (2.4) von dem sich zeitlich ändernden elektrischen Feld erzeugt. Aus der Gl. (2.9) geht die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes hervor, das bedeutet, dass keine magnetischen Elementarladungen existieren. Im Gegensatz dazu sind elektrische Ladungen die Quellen des elektrischen Feldes Gl. (2.10).

Ein statisches elektrisches Feld ist wirbelfrei, wonach  $\vec{E}$  ein Potentialfeld, z. B. zwischen zwei Ladungen, darstellt. Das Vorhandensein eines Potentials setzt die Arbeit entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve gleich null voraus bzw. das Feld erfüllt die Integrabilitätsbedingung in einem zusammenhängenden Gebiet, wodurch die Rotation des Feldes verschwindet. Demnach existiert ein Potential  $\phi$ , das mit  $\vec{E}$  durch:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (2.11)$$

gekoppelt ist. Diese Beziehung beschreibt, dass die elektrischen Feldlinien senkrecht zu Aquipotentialflächen stehen.

Das elektrische Feld lässt sich durch freie oder gebundene Ladungen aufbauen. Die dielektrische Verschiebung wird durch die freien Ladungen beschrieben. Wird ein Dielektrikum dem äußeren elektrischen Feld ausgesetzt, so führt es zu Ladungsanhäufungen (gebundene Ladungen) im Inneren oder auf der Oberfläche des Materials. Diese Eigenschaft der Dielektrika, im Gegensatz zu Leitern im Inneren ein elektrostatisches Feld aufzubauen, nennt man Polarisation  $\vec{P}(\vec{E})$ . Der Polarisationsvektor  $\vec{P}$  kann als Dipolmoment auf eine Volumeneinheit des Dielektrikums interpretiert werden und ist für einen homogenen isotropen dielektrischen Körper ohne Orientierungspolarisation definiert als:

$$\vec{P} = \kappa_0 \vec{\chi} \vec{E}, \quad (2.12)$$

wobei  $\vec{\chi}$  die dielektrische Suszeptibilität des Körpers und  $\kappa_0$  die Dielektrizitätskonstante des Vakuums sind.

Setzt man lineares Materialverhalten eines isotropen Körpers mit der relativen Dielektrizitätskonstante  $\kappa_r$  voraus, so lässt sich die konstitutive Beziehung, die die dielektrische Verschiebung mit der elektrischen Feldstärke verbindet, formulieren:

$$\vec{D}(\vec{E}) = \kappa_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}) = \kappa_0 \kappa_r \vec{E}. \quad (2.13)$$

Bei Piezo- und Ferroelektrika ist eine spontane Orientierungspolarisation vorhanden. Liegt noch eine Anisotropie des Dielektrikums vor, dann lässt sich die Beziehung zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  durch den dielektrischen Tensor  $\vec{\kappa}$  beschreiben und es gilt:

$$\vec{D} = \vec{\kappa} \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.14)$$

Damit könnte das elektrische Feld in einem Dielektrikum durch die Gl. (2.10) und (2.14) berechnet werden. Die Beschreibung des elektrischen Potentialfeldes für den Fall eines isotropen Dielektrikums kann durch die sogenannte POISSON-Gleichung erfolgen. Dabei setzt man die Gl. (2.11) in Gl. (2.14) ein und bildet die Divergenz mit der Berücksichtigung der Gl. (2.10):

$$\Delta \phi = \frac{\nabla \cdot \vec{P} - \omega_v}{\kappa}. \quad (2.15)$$

### 2.1.2 Kontinuumsmechanik

- Deformationen und Geometrie

Man betrachtet in der Kontinuumsmechanik einen Körper als zusammenhängende Menge materieller Punkte, dessen Position durch eine mathematische Abbildung  $f$  in dem euklidischen Vektorraum mit den Basisvektoren  $\vec{e}_i$  eindeutig bestimmt ist [43,44]. Ein Ortsvektor  $X_i$  gibt damit ein bestimmtes materielles Teilchen des Körpers zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  an. Die Position der materiellen Teilchen des Körpers für jeden Zeitpunkt  $t > 0$  gibt man mit dem Ortsvektor  $x_i$  an. Hiermit lässt sich die Bewegung des Kontinuums durch zwei ineinander eindeutig umkehrbare Abbildungen trennen. Zum Zeitpunkt  $t_0$  wird die Abbildung als Referenzkonfiguration bezeichnet. Zum

Zeitpunkt  $t > t_0$  befindet sich die Abbildung in der sogenannten Momentankonfiguration. Die Position der materiellen Punkte bezüglich der Referenzkonfiguration sind durch materielle bzw. LAGRANGESche Koordinaten  $x_i = x(X, t)$  bestimmt. Eine Darstellung des Materiepunktes in der Momentankonfiguration  $X_i = X_i(x, t)$  nennt man räumliche bzw. EULERSche Beschreibung. Zur EULERSchen Darstellung der Bewegung wird öfter bei der Behandlung von Problemen in der Strömungsmechanik zugegriffen. Angenommen, es soll eine Zeitableitung einer Feldgröße  $\xi = f(x_i(X_i, t), t)$  bestimmt werden. Unter Berücksichtigung der lokalen und konvektiven Anteile folgt:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (2.16)$$

In der Festkörpermechanik wird allerdings die Beschreibung nach LAGRANGE bevorzugt. Ändert sich die Position der materiellen Punkte des Körpers, z.B. bei der Verformung, so lässt sich das mathematisch durch den Verschiebungsvektor  $u_i$  angeben:

$$u_i(X_i, t) = x_i(X_i, t) - X_i. \quad (2.17)$$

Für jeden Punkt des Körpers kann man den Geschwindigkeitsvektor  $v_i$  durch die Bildung der partiellen Ableitung des entsprechenden Verschiebungsvektors  $u_i$  angeben:

$$v_i = \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}. \quad (2.18)$$

Die wiederholte Anwendung der Zeitableitung auf den Verschiebungsvektor gibt den Beschleunigungsvektor an:

$$a_i = \ddot{u}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (2.19)$$

Unter Einwirkung der Kräfte auf einen Körper können außer reiner Starrkörperbewegung sowohl Verformungen als auch Volumenänderungen stattfinden. Das Linienelement  $dX_i$  geht von dem Referenzzustand in die Momentankonfiguration als  $dx_i$  über. Da  $dx_i$  eine Funktion des Ausgangszustandes und der Zeit ist, lässt sich das totale Differenzial der Funktion bilden. Bei Betrachtung zu einem festen Zeitpunkt mit  $dt = 0$  definiert man eine Verbindung zwischen beiden Konfigurationen, genannt Deformationsgradient:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}. \quad (2.20)$$

Um die Eindeutigkeit der Umkehrbarkeit vom Tensor  $F_{ij}$  zu gewährleisten, ist dessen JACOBI-Determinante ungleich null.

Durch die Betrachtung der relativen Längenänderung des Linienelements  $dx_i^2 - dX_i^2$  infolge der Deformation und die Annahme infinitesimaler Verschiebungen mit  $\partial u_i / \partial x_j \approx \partial u_i / \partial X_j \ll 1$ , d.h. dass das Quadrat des Verschiebungsgradienten verschwindet, kann ein linearer Verzerrungstensor, der keine Starrkörperbewegung beinhaltet, definiert werden:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.21)$$

Die Hauptdiagonale des Verzerrungstensors  $\varepsilon_{ij}$  gibt die lokalen Dehnungen wieder und die anderen Anteile entsprechen einer Scherung des Volumenelements. Die Gl. (2.21) bildet eine Verknüpfung zwischen Verschiebungen und sich daraus ableitenden Verzerrungen. Um die eindeutige Umkehrbarkeit der Beziehungen zu gewährleisten, d.h., dass die Verschiebungen stetig sind, müssen die Integrabilitätsbedingungen oder auch Kompatibilitätsbedingungen genannt, erfüllt werden:

$$\varepsilon_{ik,lm} + \varepsilon_{lm,ik} = \varepsilon_{il,km} + \varepsilon_{km,il} . \quad (2.22)$$

Allgemein lässt sich die Bewegung des Kontinuums in Translation, Rotation und Verzerrung aufspalten. Daraus lassen sich auch die Aussagen über die Geschwindigkeiten der Vorgänge, die bei inelastischen Stoffgesetzen große Bedeutung haben, formulieren.

- Spannungsvektor und Spannungstensor

Die auftretenden Verformungen im Körper beruhen auf der Wirkung des Vorhandenseins der belastenden Kräfte  $f_i$ . Das EULERSche Schnittprinzip erlaubt durch den gedanklichen Schnitt an bestimmten Stellen dort wirkende Kräfte freizulegen. Dabei teilt man die resultierende Wirkung aller angreifenden Kräfte in die Summe aller Volumenkräfte  $b_i$  und Oberflächenkräfte  $t_i$  (Spannungsvektor) auf, die wie folgt definiert sind:

$$b_i = \frac{df_i}{dv} , \quad t_i = \frac{df_i}{da} , \quad (2.23)$$

wobei  $dv$  ein infinitesimales Volumenelement mit der angenommenen konstanten Massendichte  $\rho$  und  $da$  ein infinitesimaler Schnittflächenelement mit dem Normalenvektor  $n_i$  ist. Das CAUCHYSche Fundamentaltheorem führt einen von dem Normalenvektor  $n_i$  unabhängigen Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  ein, so dass gilt:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j . \quad (2.24)$$

Die Definition des CAUCHYSchen Spannungstensors  $\sigma_{ij}$  erfolgt in der Momentankonfiguration und wird somit auch als „wahrer Spannungstensor“ bezeichnet. Der CAUCHYSche Spannungstensor ist an die EULERSche Darstellung geknüpft. Um in die LAGRANGESche Beschreibung überzugehen, muss der aktuelle Kraftvektor  $f_i$  auf die Ausgangsschnittfläche  $dA$  bezogen werden. Dadurch lässt sich der 1. PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor definieren:

$$P_{ij} = \det(F) F_{ij}^{-1} \sigma_{ij} \quad (2.25)$$

Allerdings ist  $P_{ij}$  ein unsymmetrischer Spannungstensor, der für die Formulierung von Materialgesetzen ungünstig und nicht objektiv ist. Daher definiert man einen „künstlichen“ symmetrischen Spannungstensor, der als 2. PIOLA-KIRCHHOFFscher Spannungstensor bekannt ist:

$$T_{ij} = \det(F) F_{ik}^{-1} \sigma_{kl} F_{jl}^{-1} . \quad (2.26)$$

Hier wird die aktuelle Schnittkraft  $f_i$  in die Ausgangskonfiguration transformiert und auf die Ausgangsschnittfläche  $dA$  bezogen. Der „künstliche“ Spannungstensor  $T_{ij}$  stellt eine reine Rechengröße dar und hat keine physikalische Auslegung.

- Bilanzgleichungen

Das Prinzip der Erhaltung der Masse schließt eine Zu- oder Abnahme der Masse des Körpers aus:

$$m = \int_V \rho dv = \text{const.} \quad (2.27)$$

Daraus folgt in EULERScher Darstellung die Kontinuitätsgleichung in globaler Formulierung:

$$\dot{m} = \int_V (\dot{\rho} + \rho v_{i,i}) dv = 0. \quad (2.28)$$

Die Gl. (2.28) zeigt, dass die Masse weder erschaffen noch vernichtet wird und sich lediglich die Dichte  $\rho$  verändern kann.

Bei dynamischen Problemstellungen in der Mechanik lässt sich das Gleichgewicht eines Körpers durch das 2. NEWTONschen Gesetz bzw. den Impulssatz beschreiben:

$$\int_V b_i dV + \int_A t_i dA = \int_V \rho \ddot{u}_i dV. \quad (2.29)$$

Der Impulssatz besagt, dass die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses eines Kontrollvolumens  $V$  der Wirkung aller Volumen- und Oberflächenlasten gleich ist. Unter Berücksichtigung des CAUCHY-Theorems (2.24) und die Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes auf das Oberflächenintegral in Gl. (2.29) erhält man die differenzielle Form des Impulssatzes bzw. CAUCHYsche Bewegungsgleichung:

$$b_i + \sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i. \quad (2.30)$$

Analog zur Impulsbilanz lässt sich die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses  $\vec{L}$  als resultierendes Drehmoment  $\vec{M}_R$  aller Volumen- und Oberflächenkräfte beschreiben:

$$\int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j \ddot{u}_k dV = \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j f_k dV + \int_A \varepsilon_{ijk} x_j t_k dA, \quad (2.31)$$

wobei  $\varepsilon_{ijk}$  den LEVI-CEVITA-Tensor darstellt.

Die differentielle Darstellung der Drehimpulsbilanz Gl. (2.32) liefert die Erkenntnis der Symmetrie des CAUCHYschen Spannungstensors:

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0. \quad (2.32)$$

Weitere Bilanzgleichungen sind als 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik bekannt. Die Energiebilanz beschreibt, dass in einem geschlossen System die zeitliche Änderung der inneren und kinetischen Energie des Körpers der Leistung der äußeren Kräfte und der über die Systemgrenzen aus-

getauschten Wärme pro Zeit entspricht. Die Entropiebilanz definiert die irreversiblen Prozesse und gibt die Menge der thermischen Energie an, die zur Ausführung von Arbeit vorhanden ist.

Die unter bestimmten Annahmen aufgestellten Beziehungen in vorigen Kapiteln entsprechen einem mechanischen Kontinuum und werden für die weiteren Betrachtungen von piezoelektrischen Problemen zugrunde gelegt. Diese Beziehungen gelten unabhängig vom Material. Allerdings ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als die verwendeten physikalischen Größen. Die fehlenden Gleichungen sowie die Tatsache, dass verschiedene Materialien sich unter denselben äußeren Kräften unterschiedlich verhalten, finden sich in den Materialgesetzen wieder.

### 2.1.3 Materialgesetze (Thermodynamik piezoelektrischer Festkörper)

- HOOKEsches Materialgesetz

Unter Voraussetzung des linear-elastischen Materialverhaltens lässt sich die Beziehung zwischen  $\sigma_{ij}$  und  $\varepsilon_{ij}$  linearisieren zu:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} , \quad (2.33)$$

wobei  $c_{ijkl}$  einen symmetrischen Elastizitätstensor darstellt.

Das verallgemeinerte HOOKEsche Gesetz für einen isotropen Körper findet man auch öfter mit beiden LAMÉ-Konstanten:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} , \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} , \quad (2.34)$$

in folgender Form dargestellt:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} , \quad (2.35)$$

mit der Querkontraktionszahl  $\nu$ , dem Elastizitätsmodul  $E$  und dem KRONECKER-Symbol  $\delta_{ij}$ . Für diesen speziellen Fall lässt sich der Elastizitätstensor wie folgt angeben:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (2.36)$$

Die Symmetrieeigenschaften des Elastizitätstensors ergeben sich aus der Symmetrie von Spannungs- und Verzerrungstensor:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klji} . \quad (2.37)$$

Zusätzlich liefert die Existenz eines elastischen Potentials und die Vertauschbarkeit der partielle Differentiationen nach dem Satz von SCHWARZ eine Möglichkeit der Vertauschung von  $ij$  und  $kl$ .

Die Einführung des Elastizitätstensors ergibt bei dem Einsetzen der Gl. (2.33) in die CAUCHYsche Bewegungsgleichung Gl. (2.30) und Berücksichtigung der Gl. (2.21) ein eindeutig lösbares NAVIERSches Bewegungsgleichungssystem:



$$\rho \ddot{u}_i = b_i + c_{ijkl} u_{k,lj} . \quad (2.38)$$

Auf Grund der Symmetrie des vierstufigen Elastizitätstensors  $c_{ijkl}$  lässt sich die Anzahl der elastischen Konstanten von 81 ( $i, j, k, l = 1..3$ ) auf 21 unabhängige Konstanten (triklines Kristallsystem [45]) herabsetzen. In Abhängigkeit des vorliegenden Materialverhaltens (orthotrop, transversal isotrop, isotrop) existieren zusätzliche Symmetrieebenen, was die Anzahl der elastischen Konstanten entsprechend reduziert.

- **Ebener Spannungs-, Verzerrungszustand und Transformation**

Man unterscheidet zwei Extremfälle des räumlichen Spannungszustandes, die je nach Randbedingung zutreffen können. Man versucht, eine Berechnungsaufgabe auf die einfachen Zustandsmodelle zu übertragen. Damit vereinfacht sich der Lösungsaufwand.

Wird ein dünnes flächiges Bauteil, wie es bei rotierenden flachen Scheiben oder bei den dünnwandigen Behältern unter Innendruck der Fall ist, durch die angreifende Kräfte in der Längsebene ( $x, y$ ) des Tragwerks belastet, so spricht man vom ebenen Spannungszustand (ESZ). Da die Ober- und Unterfläche unbelastet sind, müssen dort die Spannungskomponenten in  $z$ -Richtung gleich null sein:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zy} = \sigma_{zx} = 0 . \quad (2.39)$$

Sind die Randbedingungen so gegeben, dass alle Verzerrungskomponenten in der  $z$ -Richtung gleich null sind:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{zx} = 0 , \quad (2.40)$$

so liegt ein ebener Verzerrungszustand (EVZ) vor. Das ist zum Beispiel der Fall bei den Körpern, deren Querschnitt klein gegenüber seiner Längsrichtung ist.

Sind die Spannungen oder Verzerrungen in einem  $(x, y, z)$  Koordinatensystem gegeben und man möchte sie in einem anderen um Winkel  $\beta$  um die  $z$ -Achse gedrehten Koordinatensystem  $(x^*, y^*, z^*)$  betrachten, so müssen diese nach Gl. (2.41) transformiert werden:

$$\begin{aligned} \eta_{ij}^* &= A_{ij} \eta_{ik} A_{kj} , \\ A_{ij} &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Damit hätte man für Spannungen und Verzerrungen im ESZ bzw. EVZ folgende Transformationsbeziehungen [46]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^* &= \sigma_{xx} \cos^2 \beta + \sigma_{yy} \sin^2 \beta + \sigma_{xy} \sin(2\beta) , \\ \sigma_{yy}^* &= \sigma_{yy} \cos^2 \beta + \sigma_{xx} \sin^2 \beta - \sigma_{xy} \sin(2\beta) , \\ \sigma_{xy}^* &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \cos \beta \sin \beta + \sigma_{xy} \cos(2\beta) , \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^* &= \varepsilon_{xx} \cos^2 \beta + \varepsilon_{yy} \sin^2 \beta + \varepsilon_{xy} \sin(2\beta) , \\ \varepsilon_{yy}^* &= \varepsilon_{yy} \cos^2 \beta + \varepsilon_{xx} \sin^2 \beta - \varepsilon_{xy} \sin(2\beta) , \\ \varepsilon_{xy}^* &= (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) \cos \beta \sin \beta + \varepsilon_{xy} \cos(2\beta) . \end{aligned} \quad (2.43)$$

- Thermodynamik piezoelektrischer Festkörper

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass die zeitliche Änderung der in einem geschlossenen System enthaltenen inneren  $U$  und kinetischen Gesamtenergie  $K$  gleich der Summe am System verrichteten Arbeit  $W$  und dem über die Systemgrenze ausgetauschten Wärmestrom  $Q$  pro Zeiteinheit [47] ist:

$$\dot{U} + \dot{K} = \dot{W} + \dot{Q}. \quad (2.44)$$

Aus den thermodynamischen Grundgleichungen ergeben sich lineare konstitutive Beziehungen für piezoelektrische Werkstoffe. Die Gl. (2.45) gibt den ersten Hauptsatz der Thermodynamik in differentieller Form für geschlossene ruhende Systeme wieder:

$$du = dw + dq, \quad (2.45)$$

wobei  $u$  die spezifische innere Energie,  $q$  die über die Systemgrenze ausgetauschte spezifische Wärme und  $w$  die spezifische äußere Arbeit sind. Die äußere Arbeit  $dw$  lässt sich als die Summe der mechanischen  $dw_{\text{mech}}$  und elektrischen Arbeit  $dw_{\text{elekt}}$  aufteilen. Für die mechanische Arbeit gilt:

$$dw_{\text{mech}} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (2.46)$$

Die elektrische Arbeit der Oberflächenladungen entspricht der Verschiebungsarbeit der Ladungen entlang eines Feldlinieninkrementes  $dS_i$  im elektrischen Feld  $E_i$ :

$$dw_{\text{elekt}} = \omega E_i dS_i = E_i dD_i, \quad (2.47)$$

wobei  $\omega$  die Ladungsdichte ist.

Bei Betrachtung des reversiblen Vergleichsprozesses ist die Änderung der im zweiten Hauptsatz der Thermodynamik eingeführten Entropie  $ds$  mit der Änderung der ausgetauschten spezifischen Wärme  $dq$  in Relation zur absoluten Temperatur  $T$  verknüpft:

$$ds = \frac{dq}{T}. \quad (2.48)$$

Mit dieser Beziehung und unter Beachtung der Gl. (2.46) sowie Gl. (2.47) kann der erste Hauptsatz der Thermodynamik wie folgt umgeformt werden:

$$du = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + E_i dD_i + T ds. \quad (2.49)$$

Die Gl. (2.49) ist auch als die GIBBSSche Fundamentalgleichung bekannt. Damit hat man eine Formulierung, die nur noch Zustandsgrößen enthält. Betrachtet man die innere Energie als unabhängige Variable, dann ist sie in der Gl. (2.49) eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen  $du(\varepsilon_{ij}, D_i, s)$  und stellt ein thermodynamisches Potential dar. Durch die Anwendung der LEGENDRE-Transformation auf die Zustandsgleichung  $du(\varepsilon_{ij}, D_i, s)$  lassen sich weitere thermodynamische Potentiale herleiten [48]. Man vertauscht die Rolle der abhängigen und der unabhängigen Variab-

len bezüglich der kanonischen Zustandsgleichung. Bei drei unabhängigen Zustandsgrößen wird jeweils eine Zustandsgröße aus dem mechanischen  $(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$  elektrischen  $(E_i, D_i)$  und thermischen  $(s, T)$  Paar gewählt wird, so dass insgesamt acht Zustandsgleichungen hergeleitet werden können [49,50]. Zur besseren Handhabung sind die  $\sigma_{ij}$ ,  $D_i$  und  $s$  als abhängige Variablen zu wählen. Das führt auf die Definition der elektrischen GIBBS-Funktion (elektrische Enthalpiedichte  $h$ ):

$$h = u - E_i D_i - Ts. \quad (2.50)$$

Die Differenzierung von Gl. (2.50) und unter Beachtung der Gl. (2.49) ergibt:

$$dh = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - D_i dE_i - s dT. \quad (2.51)$$

Da die elektrische Enthalpiedichte  $h(\varepsilon_{ij}, E_i, T)$  ein thermodynamisches Potential darstellt, lässt sich das totale Differential der Funktion bilden:

$$dh(\varepsilon_{ij}, E_i, T) = \left. \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{E_i, T} d\varepsilon_{ij} + \left. \frac{\partial h}{\partial E_i} \right|_{\varepsilon_{ij}, T} dE_i + \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_{\varepsilon_{ij}, E_i} dT, \quad (2.52)$$

wobei bei der Differentiation die tiefgestellten Größen konstant zu halten sind. Die abgeleiteten Zustandsgrößen können durch den Vergleich mit der Gl. (2.51) so definiert werden:

$$\sigma_{ij} = \left. \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{E_i, T}, \quad D_i = - \left. \frac{\partial h}{\partial E_i} \right|_{\varepsilon_{ij}, T}, \quad s = - \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_{\varepsilon_{ij}, E_i}. \quad (2.53)$$

Die abhängigen Variablen in Gl. (2.53) sind durch die konstitutive Beziehung mit den unabhängigen Variablen in (2.52) verknüpft, daher existieren für  $\sigma_{ij}$ ,  $D_i$  und  $s$  totale Differentiale:

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}, E_k, T) &= \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_{E_k, T} d\varepsilon_{kl} + \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_k} \right|_{\varepsilon_{kl}, T} dE_k + \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right|_{\varepsilon_{kl}, E_k} dT, \\ dD_i(\varepsilon_{kl}, E_k, T) &= \left. \frac{\partial D_i}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_{E_k, T} d\varepsilon_{kl} + \left. \frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right|_{\varepsilon_{kl}, T} dE_k + \left. \frac{\partial D_i}{\partial T} \right|_{\varepsilon_{kl}, E_k} dT, \\ ds(\varepsilon_{kl}, E_k, T) &= \left. \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_{E_k, T} d\varepsilon_{kl} + \left. \frac{\partial s}{\partial E_k} \right|_{\varepsilon_{kl}, T} dE_k + \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\varepsilon_{kl}, E_k} dT. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Damit können neue Zustandsgrößen mit der Berücksichtigung Gl. (2.53) eingeführt werden, wobei einige partielle Differentiale aus (2.54) in Folge der Integrabilitätsbedingung bzw. in Gestalt einer MAXWELL-Relation gleichgesetzt werden können:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_{E_k, T} &= \left. \frac{\partial^2 h}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right|_{E_k, T} = c_{ijkl}^{E, T}, & \left. \frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right|_{\varepsilon_{kl}, T} &= - \left. \frac{\partial^2 h}{\partial E_i \partial E_k} \right|_{\varepsilon_{kl}, T} = \chi_{ik}^{\varepsilon_{kl}, T}, \\ \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_k} \right|_{\varepsilon_{kl}, T} &= \left. \frac{\partial^2 h}{\partial \varepsilon_{ij} \partial E_k} \right|_{\varepsilon_{kl}, T} = - \left. \frac{\partial D_k}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{E_k, T} = -e_{ijk}^E, & \left. \frac{\partial D_i}{\partial T} \right|_{\varepsilon_{kl}, E_k} &= - \left. \frac{\partial^2 h}{\partial E_k \partial T} \right|_{\varepsilon_{kl}, E_k} = \left. \frac{\partial s}{\partial E_i} \right|_{\varepsilon_{kl}, T} = p_i^{\varepsilon_{kl}}, \\ \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right|_{\varepsilon_{kl}, E_k} &= \left. \frac{\partial^2 h}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \right|_{\varepsilon_{kl}, E_k} = - \left. \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{E_i, T} = -\lambda_{ij}^E, \end{aligned} \quad (2.55)$$

Die neu eingeführten Konstanten  $c_{ijkl}^{E, T}$ ,  $e_{ijk}^E$ ,  $\lambda_{ij}^E$ ,  $\chi_{ik}^{\varepsilon_{kl}, T}$ ,  $p_i^{\varepsilon_{kl}}$  bezeichnet man der Reihenfolge nach als Steifigkeiten, piezoelektrische Konstanten, Temperaturspannungskoeffizienten, dielektrische Konstanten und pyroelektrische Koeffizienten. Aufgrund der Vertauschbarkeit der Ableitungen geht aus (2.55) die Symmetrie der  $c_{ijkl}^{E, T}$ ,  $e_{ijk}^E$ ,  $\lambda_{ij}^E$ ,  $\chi_{ik}^{\varepsilon_{kl}, T}$  Tensoren hervor. Nimmt man an, dass die

Wärmekapazität  $C^{\varepsilon_{ij}, E_i}$  bei dem konstanten elektrischen Feld und konstanten Dehnungen eine Konstante darstellt, so lässt sich folgende Beziehung angeben:

$$\left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\varepsilon_{kl}, E_k} = - \left. \frac{\partial^2 h}{\partial T \partial T} \right|_{\varepsilon_{kl}, E_k} = \frac{\rho C^{\varepsilon_{kl}, E_k}}{T_0}, \quad (2.56)$$

wobei  $\rho$  die Dichte,  $T_0$  die Anfangstemperatur mit  $\theta = T - T_0$  sind. Der hochgestellte Index bei den Konstanten beschreibt die konstante Bedingung der jeweiligen Größe. Mit den eingeführten Konstanten aus Gl. (2.55) und Gl. (2.56) werden die konstitutiven Gleichungen der linearen Piezoelektrizität in Folge der Integration der Gl. (2.54) definiert:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijkl}^{\varepsilon, T} \varepsilon_{kl} - e_{ijk}^T E_k - \lambda_{ij}^E \theta, \\ D_k &= e_{kij}^T \varepsilon_{ij} + \kappa_{ik}^{\varepsilon, T} E_k + p_k^{\varepsilon, T} \theta, \\ s &= \lambda_{ij}^E \varepsilon_{ij} + p_k^{\varepsilon, T} E_k + \frac{\rho C^{\varepsilon_{kl}, E_k}}{T_0} \theta. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Dadurch hat man lineare Zustandsbeziehungen der Piezoelektrika unter Beachtung der Temperaturdifferenzeinflüsse. Beschränkt man sich nur auf die isentropen Zustandsänderungen, was unter bestimmten Bedingungen zulässig ist, so kann der Temperatureffekt vernachlässigt werden. Damit hätte man nur vier GIBBSsche Fundamentalgleichungen zu Verfügung:

$$\begin{aligned} du(\varepsilon_{ij}, D_i) &= \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + E_i dD_i, \\ dh(\varepsilon_{ij}, E_i) &= \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - D_i dE_i, \\ dh_{\text{elast}}(\sigma_{ij}, D_i) &= -\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} + E_i dD_i, \\ dh_s(\sigma_{ij}, E_i) &= -\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} - D_i dE_i, \end{aligned} \quad (2.58)$$

mit elastischer Enthalpiedichte  $h_{\text{elast}}$  und spezifischer Enthalpie  $h_s$ . Durch die Anwendung des Schemas, die schon oben beschrieben wurde, auf die Gl. (2.58) erhält man folgende konstitutive Beziehungen [51]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \kappa_{ik}^E E_k, \quad (2.59)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^D \varepsilon_{kl} - h_{kij} D_k, \quad E_i = -h_{ikl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ik}^E D_k, \quad (2.60)$$

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{kij} E_k, \quad D_i = d_{ikl} \sigma_{kl} + \kappa_{ik}^\sigma E_k, \quad (2.61)$$

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^D \sigma_{kl} + g_{kij} D_k, \quad E_i = -g_{ikl} \sigma_{kl} + \beta_{ik}^\sigma D_k. \quad (2.62)$$

Es ist auch ersichtlich, dass die mechanischen ( $c_{ijkl}^E$ ,  $c_{ijkl}^D$ ,  $s_{ijkl}^E$ ,  $s_{ijkl}^D$ ), dielektrischen ( $\kappa_{ik}^E$ ,  $\kappa_{ik}^\sigma$ ,  $\beta_{ik}^E$ ,  $\beta_{ik}^\sigma$ ) und piezoelektrischen ( $e_{kij}$ ,  $d_{kij}$ ,  $h_{ikl}$ ,  $g_{kij}$ ) Konstanten sich in einander umrechnen lassen [52]. Diese Konstanten müssen allerdings für jeden Werkstoff experimentell bestimmt werden.

## 2.2 Linear-elastische Bruchmechanik

Das Vorhandensein von Rissen in Bauteilen reduziert deren Festigkeit sowie verkürzt deren Lebensdauer und kann unter Umständen große Schäden verursachen. Um die Vorhersage und die eventuelle Verhinderung des Bruches zu gewährleisten, war es demzufolge zwingend notwendig, die Rissentstehung und das Risswachstum mathematisch zu beschreiben. Aus makroskopischer

Sicht wurden dabei zwei Brucharten, der spröde und der duktile Bruch, hervorgehoben. Die Sprödbbruchtheorie setzt linear-elastische Deformationen in der Prozessbruchzone voraus bzw. die Annahme des verallgemeinerten HOOKEschen Gesetzes auf den Vorgang. Dies trifft z.B. auf Materialien wie Glas, Keramik oder Metalle unter tiefer Temperatur zu. Bei einigen anderen Werkstoffen ist nichtlineares Materialverhalten in dem Bereich der Risspitze vorhanden. Aber unter der Annahme, dass die Prozesszone relativ klein und vernachlässigbar ist, lässt sich das Sprödbbruchkonzept anwenden. Einen guten Überblick dazu findet man z. B. in [53] und [54]. Ist die Zone nicht mehr vernachlässigbar gegenüber der Rissgröße, spricht man von duktilem Bruchvorgang. Dabei steht man vor einem nichtlinearen Problem, da die vorausgesetzten infinitesimal kleinen Verzerrungen nicht mehr zutreffen. Ein einfaches Beispiel stellen die Metalle unter hoher Temperatur dar. Die auftretenden großen Deformationen bringen große mathematische Schwierigkeiten mit sich, denen man durch die Einführung geeigneter Rissmodelle versucht auszuweichen. Eine gute Einführung zum Problem der nichtlinearen Bruchmechanik finden man z. B. in [55].

Dieses Kapitel beschränkt sich auf die linear-elastische Bruchmechanik bzw. es liegt eine vernachlässigbar kleine plastische Zone in der Umgebung der Risspitze vor. Außerdem wird nur auf zweidimensionale Rissprobleme, deren analytische Lösungen mittels dafür entwickelter Theorie vorliegen, eingegangen. Eine historische Übersicht zur zweidimensionalen Elastizitätstheorie findet man z. B. in [56]. Für die dreidimensionalen Rissprobleme sind keine geschlossenen analytischen Lösungen bekannt und erfordern numerische Näherungsverfahren. Allerdings ist eine Dissertation zu erwähnen, die das Übertragen der Methode der komplexen Spannungsfunktionen im zweidimensionalen Fall auf den räumlichen Fall zum Inhalt hat [57].

- Rissöffnungsarten und Spannungsintensitätsfaktoren

Auf der Basis der Superposition der linear-elastischen Bruchmechanik lässt sich jede Verformung des Risses nach IRWIN als Summe der drei voneinander unabhängigen Rissöffnungsarten (Bild 4) darstellen. Aus diesem Grund besitzen die Spannungsintensitätsfaktoren einen Index, der dem jeweiligen Belastungsmodus entspricht. Der Modus I beschreibt eine senkrechte Öffnung des Risses zur Rissebene. Der Modus II wird auch als Schermodus bezeichnet, wobei die Rissöffnung in der Rissebene erfolgt. Im Modus III bewegen sich die Rissflanken in der Ebene parallel zur Rissfront. Diese Unterteilung hat auch einen Vorteil für die Lösung der Randwertaufgaben. Eine komplizierte Belastungssituation lässt sich in eine Summe einfacher Situationen aufteilen. Im Rahmen dieser Arbeit sind nur die ersten beiden Modi von Bedeutung. So entspricht der Modus I dem symmetrischen singulären Feld der Lösung (2.96) bzw. (2.97) und der Modus II dem antisymmetrischen Spannungsfeld. Daraus folgt aus der Gl. (2.96) bzw. (2.97) die Nahfeldspannung bzw. Verschiebung an der Risspitze für Modus I [58]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \\ 1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos \varphi) \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

und für Modus II:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\varphi}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right] \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right] \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\varphi}{2} [\kappa + 2 + \cos \varphi] \\ -\cos \frac{\varphi}{2} [\kappa - 2 + \cos \varphi] \end{Bmatrix}, \quad (2.64)$$

wobei  $\kappa$  die elastische Konstante mit  $\kappa = 3 - 4\nu$  im EVZ und  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  im ESZ ist.

Die Größe der Spannungsintensitätsfaktoren ( $K_I, K_{II}$ ) ist durch die Lösung der Randwertaufgabe für einen rissbehafteten Körper bestimmt. Dabei gehen solche Größen wie z. B. Körpergeometrie, Risslänge, Risslage und Belastung in die  $K$ -Faktoren mit ein. Im Fall der analytischen Verfahren [59,60] liegen die Spannungspotentiale ( $\phi(z), \chi(z)$  siehe Kapitel 2.3.1) vor. Die Auswertung der Funktion  $\phi'(z)$  an der Rissspitze liefert schließlich die gesuchten  $K$ -Faktoren. Liegt keine analytische Lösung des jeweiligen Problems vor, müssen andere Verfahren herangezogen werden. In der Regel werden die Spannungsintensitätsfaktoren mit numerischen Näherungsverfahren oder experimentell bestimmt. Zum Beispiel können die sogenannten BUECKNER-Gewichtsfunktionen zur Ableitung von Spannungsintensitätsfaktoren herangezogen werden. Eine weitere Methode ist die Kollokationsmethode. Mit Hilfe der Potenzreihe werden die unbekannten Koeffizienten berechnet, wobei diese Lösung nur in einem bestimmten Radius um die Rissspitze die gegebenen Bedingungen erfüllt. Eine der am häufigsten zurzeit verwendeten Methoden zur Bestimmung von gesuchten Spannungsintensitätsfaktoren ist die Finite Element Methode. Es erlaubt, eine Reihe von komplexen technischen Problemen zu behandeln. In der Fachliteratur z. B. bei MURAKAMI [61,62] findet man fertige Rechenvorschriften zur Berechnung von  $K$ -Faktoren für bestimmte Belastungsfälle.

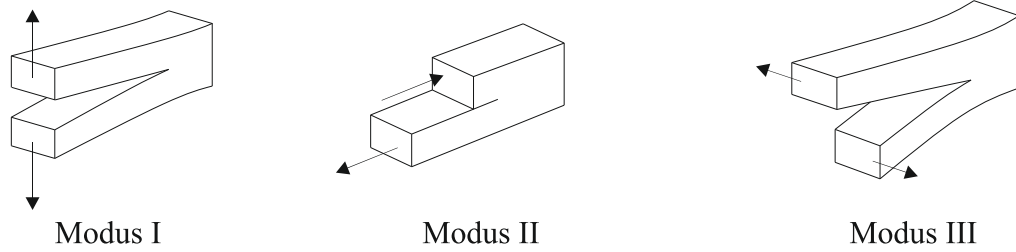


Bild 4: Mögliche Rissöffnungsarten entsprechend den Spannungsintensitätsfaktoren ( $K_I, K_{II}, K_{III}$ )

## 2.3 Ebene (zweidimensionale) Probleme

### 2.3.1 KOLOSOV-Gleichungen für isotrope Werkstoffe

Bei einer zweidimensionalen Betrachtung (z. B. einer Scheibe) genügt der Spannungszustand im Körper bei der Vernachlässigung der Volumenkräfte den Gleichgewichtsbedingungen und der Kompatibilitätsbedingung in Spannungen ausgedrückt:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (2.65)$$

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (2.66)$$

Beide Gleichungen lassen sich zu einer biharmonischen Gleichung durch die Einführung der AIRY-schen Spannungsfunktion  $F(x, y)$  mit  $\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ,  $\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$  und  $\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$  zusammenfassen:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0, \quad \text{bzw.} \quad \Delta \Delta F = 0. \quad (2.67)$$

Dies führt dazu, dass die Lösung der Randwertaufgabe durch entsprechendes Auffinden der Funktion  $F(x, y)$  bestimmt werden kann. GOURSAT zeigte, dass sich eine biharmonische Funktion durch zwei analytische Funktionen  $\phi(z)$  und  $\chi(z)$  sowie einer komplexen Veränderlichen  $z = x + iy$  darstellen lässt [63,64]:

$$F(x, y) = \Re(\bar{z}\phi(z) + \chi(z)). \quad (2.68)$$

Demzufolge müssen beide analytischen Funktionen  $\phi(z)$  und  $\chi(z)$ , die die Randbedingungen erfüllen, bestimmt werden. Die Anwendung der komplexen Funktion auf die Elastizitätstheorie ergab die bekannten KOLOSOV'schen Beziehungen für einen isotropen Körper. Definiert man zusätzlich noch  $\chi'(z) = \psi(z)$ , so folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2(\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}) = 4\Re(\phi'(z)), \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2(\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)). \end{aligned} \quad (2.69)$$

MUSKHELISHVILI leitete diese Gleichungen ebenso ab und leistete außerdem einen großen Beitrag zur Anwendung der komplexen Funktionstheorie auf die Probleme der ebenen Elastizitätstheorie [59]. Aus den Beziehungen (2.69) lassen sich bei bekannten Funktionen  $\phi(z)$  und  $\chi(z)$  die Spannungskomponenten  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  berechnen. Folglich besteht die Aufgabe in der Bestimmung beider analytischer Funktionen  $\phi(z)$  und  $\chi(z)$ , die die Randbedingungen erfüllen.

In Abhängigkeit von den gegebenen Randbedingungen, sei es die vorgegebenen Verschiebungen  $(u_x, u_y)$  oder der Spannungsvektor  $(f_x, f_y)$ , lässt sich der Zusammenhang zwischen  $\phi(z)$  und  $\chi(z)$  wie folgt angeben [59]:

$$\begin{aligned} 2\mu(u_x + iu_y) &= \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \\ f_x + if_y &= -i \frac{\partial}{\partial s} (\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \psi(z)), \end{aligned} \quad (2.70)$$

wobei  $ds$  ein Kontursegment ist. Für die Berechnung vieler wichtiger Aufgaben sind die Formeln (2.69) und (2.70) in Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  besser geeignet:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} &= 2(\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\varphi} &= 2e^{2i\varphi}(\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)), \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} 2\mu(u_r + iu_\varphi) &= e^{-i\varphi}(\kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}), \\ f_r + if_\varphi &= \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} - e^{-2i\varphi}(\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Wie schon zuvor erwähnt wurde, kann die Lösung der Randwertaufgabe nur erfolgen, wenn die Funktionen  $\phi(z)$  und  $\chi(z)$  bzw.  $\psi(z)$  bekannt sind. Die Herleitung der komplexen Potentiale  $\phi(z)$  und  $\psi(z)$  findet man bei MUSKHELISHVILI in [59], hier werden nur die abgeleiteten Formeln für ein unendliches Gebiet mit einem Loch beliebiger Form angegeben, in dessen Zentrum der Koordinatenursprung liegt:

$$\phi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + (B + iC)z + \phi_0(z), \quad \psi(z) = -\frac{\kappa(X + iY)}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + (B' + iC')z + \psi_0(z), \quad (2.73)$$

wobei  $(X, Y)$  die Komponenten des resultierenden Vektors aller angreifenden Kräfte am Rand des Loches sind. Die Funktionen  $\phi_0$  und  $\psi_0$  sind holomorph und können demzufolge in eine Potenzreihe entwickelt werden. Die Konstanten  $B$ ,  $B'$  und  $C'$  sind durch die Hauptspannungen im Unendlichen  $\sigma_I^{(\infty)}$  und  $\sigma_{II}^{(\infty)}$  bestimmt und es gilt:

$$B = \frac{\sigma_I^{(\infty)} + \sigma_{II}^{(\infty)}}{4}, \quad B' = -\frac{\sigma_I^{(\infty)} - \sigma_{II}^{(\infty)}}{2} \cos 2\alpha, \quad C' = \frac{\sigma_I^{(\infty)} - \sigma_{II}^{(\infty)}}{2} \sin 2\alpha, \quad (2.74)$$

wobei  $\alpha$  ein Winkel zwischen der Hauptachse der  $\sigma_I^{(\infty)}$  und der  $x$ -Achse ist. Die Konstante  $C$  beeinflusst die Spannungen nicht, da sie als Drehungskomponente des unendlich fernen Teiles der Ebene angesehen wird und kann demzufolge gleich null gesetzt werden kann.

Für einige bestimmte Fälle konnte man mit Hilfe von konformen Abbildungen die Gegebenheit vereinfachen. Man versucht in der Regel, die Geometrieform des Körpers in der  $z$ -Ebene auf eine einfache Geometrie in der  $\zeta$ -Ebene, so dass  $z = \omega(\zeta)$  gilt, abzubilden. Das bedeutet, dass auch die KOLOSOVSKEN Formeln sowie die Randbedingungen in den neuen Bereich transformiert werden müssten. Nach dem Lösen der Aufgabe wird das Ergebnis in den Anfangsbereich zurücktransformiert. Die Schwierigkeit besteht in dem Auffinden einer geeigneten Funktion  $\omega(\zeta)$ .

### 2.3.2 Anwendung der konformen Abbildung

Wie schon erwähnt wurde, werden komplizierte gegebene Bereiche konform auf einfache Formen abgebildet. Man verknüpft zwei komplexe Veränderliche  $z$  und  $\zeta$  durch die Beziehung  $\zeta = f(z)$ . Auf dem Bild 5 sieht man die Abbildung des achsenparallelen Netzes in der  $z$ -Ebene mit  $z = x + iy$  auf das Parabelnetz in der  $\zeta$ -Ebene mit  $\zeta = \xi + i\eta$ . Dabei ordnet die Funktion  $f(z)$  jedem Punkt in der  $\zeta$ -Ebene einen Punkt in der  $z$ -Ebene zu. Diese Funktion muss auch eine eindeutige Umkehrbarkeit der Übertragung gewährleisten. Der Definition nach muss die komplexe Ableitung einer konformen Abbildung  $f(z)$  ungleich null sein, wodurch deren Winkeltreue gesichert ist. Näheres zum diesen Thema findet man z. B. in [65,66,67].

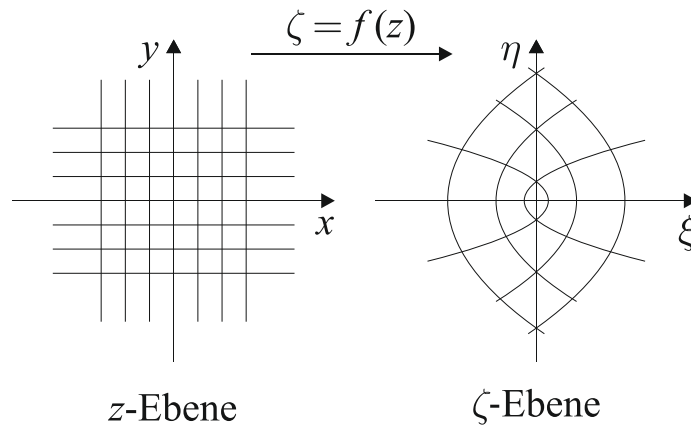


Bild 5: Achsenparalleles Netz abgebildet auf Parabelnetz,  $\zeta = z^2$



Für die weiteren Betrachtungen wird eine Abbildung von einem Ellipsenäußeren in der  $z$ -Ebene auf eines Einheitskreisinneren in der  $\zeta$ -Ebene benötigt (Bild 6). In der Literatur findet man dafür folgende Funktion:

$$z = \omega(\zeta) = c \left( \frac{1}{\zeta} + m\zeta \right), \quad (2.75)$$

mit  $c = \frac{a+b}{2}$ ,  $m = \frac{a-b}{a+b}$  und  $\zeta = re^{i\beta}$ ,  $|\zeta| \leq 1$ , wobei  $a$  und  $b$  die Halbachsen der Ellipse sind. Betrachtet man einen unendlich scharfen Riss, so ist  $b = 0$  anzunehmen und führt für (2.75) zu:

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a}{2} \left( \frac{1}{\zeta} + \zeta \right). \quad (2.76)$$

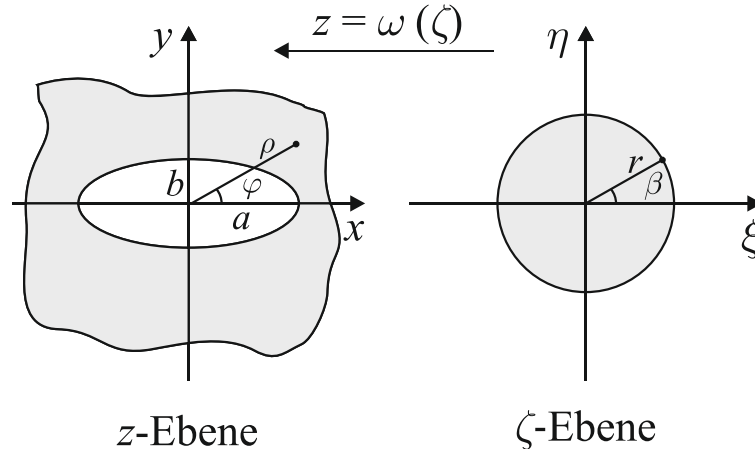


Bild 6: Abbildung von einem Ellipsenäußeren auf das Kreisinnere

### 2.3.3 Transformation von KOLOSOVSKEN Gleichungen

Beim Übergang auf einen neuen Bereich müssen die KOLOSOVSKEN Beziehungen auch auf die  $\zeta$ -Ebene transformiert werden. Nach dem Einsetzen  $\omega(\zeta)$  statt  $z$  erhält man:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi(\omega(\zeta)) = \phi(\zeta), & \phi'(z) &= \phi'(\zeta) \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \Phi(\zeta), \\ \chi'(z) &= \chi'(\omega(\zeta)) = \chi'(\zeta) = \psi(\zeta), & \chi''(z) &= \psi'(\zeta) \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \Psi(\zeta). \end{aligned} \quad (2.77)$$

woraus für die Gl. (2.71) mit  $e^{2i\varphi} = \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{r^2 \overline{\omega'(\zeta)}}$  folgt [59]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} &= 2(\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}) = 4\Re(\Phi(\zeta)), \\ \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\varphi} &= 2 \frac{\zeta^2}{r^2 \overline{\omega'(\zeta)}} \left( \overline{\omega(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi(\zeta) \right), \end{aligned} \quad (2.78)$$

ebenso ist es auch mit den Gl. (2.72) und (2.73) zu verfahren.

### 2.3.4 Unendliche Ebene mit einem Riss (GRIFFITH-Riss)

Betrachtet werden soll eine unendliche Ebene aus isotropem linear-elastischem Material mit einem Riss der Länge  $2a$  (Bild 48). An dem Beispiel sollen zwei Belastungsarten näher untersucht werden. Im ersten Fall (a) soll eine konstanten Zugspannung  $\sigma$  senkrecht zum Riss wirken. Im zweiten

Fall (b) wird die Spannung  $\tau$  parallel zur Rissrichtung angelegt. Es sei vorgegeben, dass die Rissufer frei von äußeren Spannungen sind, d.h.  $X = Y = 0$  in Gl. (2.73) anzusetzen ist. Außerdem gelten im Unendlichen folgende Randbedingungen:

$$(a) \quad \sigma_{yy}^{(\infty)} = \sigma, \quad \sigma_{xx}^{(\infty)} = \sigma_{xy}^{(\infty)} = 0, \quad (2.79)$$

$$(b) \quad \sigma_{xy}^{(\infty)} = \tau, \quad \sigma_{xx}^{(\infty)} = \sigma_{yy}^{(\infty)} = 0. \quad (2.80)$$

Daraus lassen sich die Konstanten  $B$ ,  $B'$  und  $C'$  in (2.74) berechnen:

$$(a) \quad B = \frac{\sigma}{4}, \quad B' = -\frac{\sigma}{2}, \quad C' = 0, \quad (2.81)$$

$$(b) \quad B = \frac{\tau}{4}, \quad B' = 0, \quad C' = \frac{\tau}{2}. \quad (2.82)$$

Die Bestimmung der holomorphen Funktionen  $\phi_0$  und  $\psi_0$  bedarf entsprechender Techniken. So findet man zum Beispiel in [59] zum Lösen des Problems eine Anwendung des CAUCHYSchen Integrals auf die transformierten Gl. (2.72) in die  $\zeta$ -Ebene. Unter der Verwendung der Reihenentwicklung für die beiden holomorphen Funktionen mit:

$$\phi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta^n, \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \zeta^n, \quad (2.83)$$

erhält man zwei Funktionsgleichungen. Durch anschließenden Koeffizientenvergleich bezüglich der Exponenten von  $\zeta^n$  wird ein Gleichungssystem zur Bestimmung von  $\alpha_n$  und  $\beta_n$  gelöst, wodurch die gesuchten Funktionen folgen.

Um es für das Problem unter (a) und (b) einfacher zu machen, nehme man aus [60] schon bestimmte komplexe Spannungsfunktionen  $\phi(\zeta)$  und  $\psi(\zeta)$  für eine unendliche Scheibe unter Zug mit elliptischem Ausschnitt:

$$(a) \quad \begin{aligned} \phi(\zeta) &= \frac{pc}{4} \left[ \frac{1}{\zeta} + (2e^{2i\alpha} - m)\zeta \right], \\ \psi(\zeta) &= -\frac{pc}{2} \left[ \frac{e^{-2i\alpha}}{\zeta} + \frac{\zeta^3 e^{2i\alpha} + (me^{2i\alpha} - m^2 - 1)\zeta}{m\zeta^2 - 1} \right], \end{aligned} \quad (2.84)$$

wobei  $p$  für die Last, die unter dem Winkel  $\alpha$  angreift, steht. Für einen schlitzförmigen Riss ist  $b = 0$ , woraus  $m = 1$  und  $c = \frac{a}{2}$  folgen. Für den Fall (a) ist  $p = \sigma$  und  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  und man erhält:

$$(a) \quad \begin{aligned} \phi(\zeta) &= \frac{\sigma a}{8} \left[ \frac{1}{\zeta} - 3\zeta \right], \\ \psi(\zeta) &= i \frac{a\tau}{2} \left[ \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^3 + 3\zeta}{\zeta^2 - 1} \right]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Für den Fall des Modus II sind die beiden Spannungspotentiale wie folgt gegeben:

$$(b) \quad \begin{aligned} \phi(\zeta) &= i \frac{a\tau}{8} \left[ 3\zeta - \frac{1}{\zeta} \right], \\ \psi(\zeta) &= i \frac{a\tau}{2} \left[ \frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^3 + \zeta}{\zeta^2 - 1} \right]. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Jetzt müssen die gefundenen Spannungspotentiale in die  $z$ -Ebene transformiert werden. Gemäß der Gl. (2.76) ergeben sich die bekannten Funktionen unter Zugbelastung:

$$(a) \quad \begin{aligned} \phi(z) &= \frac{\sigma}{4} \left[ 2\sqrt{z^2 - a^2} - z \right], \\ \psi(z) &= \frac{\sigma}{2} \left[ z - \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right], \end{aligned} \quad (2.87)$$

und unter der reinen Schubbelastung:

$$(b) \quad \begin{aligned} \phi(z) &= -i \frac{\tau}{4} \left[ 2\sqrt{z^2 - a^2} - z \right], \\ \psi(\zeta) &= i \frac{\tau}{2} \cdot \frac{2z^2 - a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Das Spannungs- und Verschiebungsfeld lässt sich mit den KOLOSOVSKEN Gleichungen (2.71) und (2.72) bzw. (2.69) und (2.70) leicht berechnen (siehe z.B. dazu [58]):

$$\begin{aligned} S_1 &= 4\Re(\phi'(z)), & S_2 &= 2(\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)), \\ \sigma_{xx} &= \frac{1}{2}\Re(S_1 - S_2), & \sigma_{yy} &= \frac{1}{2}\Re(S_1 + S_2), & \sigma_{xy} &= \Im(S_2). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Von großer Wichtigkeit ist die Kenntnis der Spannungen vor der Rissspitze. Die Singularität der Spannungen ist ein rein mathematisches Modell und ist in der Praxis nicht vorhanden. Vielmehr sind die Spannungen dort endlich und es tritt in einer bestimmten Umgebung um die Rissspitze das plastische Fließen auf [54]. Die Annahme, dass die plastische Zone sehr klein ist, soll im Weiteren beibehalten werden.

Die in der Umgebung der Rissspitze dominierenden Spannungen werden durch die sogenannten Spannungsintensitätsfaktoren charakterisiert, die das Verhalten eines Risses angeben. Da nicht für jede Geometrieform einer Probe bzw. eines Bauteils eine komplexe Übertragungsfunktion wie im Kapitel 2.3.2 bekannt ist, benötigt man eine allgemeingültige Näherungslösung, die unabhängig von der Geometrie des Problems ist. Diese Lösung wurde erstmals vom WILLIAMS [68] gefunden und soll im Kapitel 2.3.5 erläutert werden.

### 2.3.5 Rissnahfeldspannungen und die WILLIAMS-Reihe

Es soll eine unendliche Scheibe unter beliebiger Last mit einem Riss betrachtet werden. Das Polarkoordinatensystem  $(r, \varphi)$  wird in die Rissspitze positioniert (Bild 7) und die Rissflanken mit  $\sigma_{\varphi\varphi}|_{\pm\pi} = \sigma_{r\varphi}|_{\pm\pi} = 0$  sind frei von Belastung.

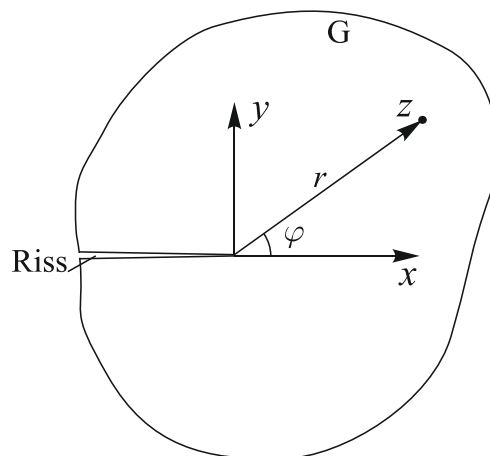


Bild 7: Scheibe mit einem Riss

Die beiden komplexen Potentiale  $(\phi(z), \chi(z))$  sind im Gebiet  $G$  ohne Riss holomorph. Im Gebiet  $G$  mit Riss (so genanntes Schlitzgebiet) können die Potentiale mit den einfachen Potenzfunktionen mit dem Ansatz:

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{\lambda_n}, \quad \chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{\lambda_n+1}, \quad (2.90)$$

mit  $z = re^{i\varphi}$  und  $\lambda_n = \frac{n}{2}$  gewählt werden. Das Einsetzen der Ansatzfunktionen in die KOLOSOV-schen Formeln (2.71) liefert schließlich (siehe z. B. [68,58,54]):

$$\sigma_{\varphi\varphi} + i\sigma_{r\varphi} = \lambda_n r^{\lambda_n-1} (\lambda_n A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} + \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)} + (\lambda_n + 1) B_n e^{i\varphi(\lambda_n+1)}). \quad (2.91)$$

In Anbetracht der Randbedingungen an den Rissufern mit  $\varphi = \pm\pi$  ergibt sich ein Gleichungssystem mit vier reellen Gleichungen, dessen Determinante gleich null sein soll bzw. der Ausdruck in Klammern, um die nichttriviale Lösung auszuschließen:

$$\begin{bmatrix} \lambda_n A_n e^{i\lambda_n\pi} + \overline{A_n} e^{-i\lambda_n\pi} + (\lambda_n + 1) B_n e^{i\lambda_n\pi} \\ \lambda_n A_n e^{-i\lambda_n\pi} + \overline{A_n} e^{i\lambda_n\pi} + (\lambda_n + 1) B_n e^{-i\lambda_n\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.92)$$

Multipliziert man den unteren Ausdruck aus der Gl. (2.92) mit  $e^{2i\lambda_n\pi}$  und subtrahiert daraus die obere Gleichung, so erhält man:

$$\overline{A_n} e^{-i\lambda_n\pi} (e^{4i\lambda_n\pi} - 1) = 0. \quad (2.93)$$

Die reelle Lösung dieser Gleichung liefert, dass:

$$\lambda_n = \frac{n}{2}, \text{ mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.94)$$

Aus der Gl. (2.94) folgt, dass der Lösungsansatz in Gl. (2.90) berechtigt ist. Für  $n < 0$  besitzt die Lösung eine nicht zulässige Form bzw. führt zu unendlichen Verschiebungen. Der komplexe Koeffizient  $B_n$  lässt sich aus der Gl. (2.92) über  $A_n$  ausdrücken. Damit können die gesuchten Spannungspotentiale als Summe der Eigenfunktionen dargestellt werden:

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{\frac{n}{2}}, \quad \chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{\frac{n}{2}+1}. \quad (2.95)$$

Anschließend mit  $A_n = a_n + ib_n$  und den KOLOSOV-schen Formeln können die Spannungen und Verschiebungen im Rissspitzenfeld bestimmt werden. Im [58] findet man z.B. folgende Beziehungen für die Spannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(r, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \{a_n M_{11}^{(n)} + b_n N_{11}^{(n)}\}, \\ \sigma_{yy}(r, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \{a_n M_{22}^{(n)} + b_n N_{22}^{(n)}\}, \\ \sigma_{xy}(r, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} \{a_n M_{12}^{(n)} + b_n N_{12}^{(n)}\}, \end{aligned} \quad (2.96)$$

mit

$$\begin{aligned}
M_{11}^{(n)} &= \frac{n}{2} \left\{ \left[ 2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right] \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \varphi - \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \varphi \right\}, \\
N_{11}^{(n)} &= \frac{n}{2} \left\{ \left[ -2 + (-1)^n - \frac{n}{2} \right] \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \varphi + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \varphi \right\}, \\
M_{22}^{(n)} &= \frac{n}{2} \left\{ \left[ 2 - (-1)^n - \frac{n}{2} \right] \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \varphi + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \varphi \right\}, \\
N_{22}^{(n)} &= \frac{n}{2} \left\{ \left[ -2 - (-1)^n + \frac{n}{2} \right] \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \varphi - \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \varphi \right\}, \\
M_{12}^{(n)} &= \frac{n}{2} \left\{ \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \varphi - \left[ \frac{n}{2} + (-1)^n \right] \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \varphi \right\}, \\
N_{12}^{(n)} &= \frac{n}{2} \left\{ \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \varphi - \left[ \frac{n}{2} - (-1)^n \right] \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \varphi \right\},
\end{aligned}$$

und für die Verschiebungen gilt:

$$\begin{aligned}
u_x(r, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\mu} r^{\frac{n}{2}} \{ a_n F_1^{(n)} + b_n G_1^{(n)} \}, \\
u_y(r, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\mu} r^{\frac{n}{2}} \{ a_n F_2^{(n)} + b_n G_2^{(n)} \}, \\
F_1^{(n)} &= \left[ \kappa + (-1)^n + \frac{n}{2} \right] \cos \frac{n}{2} \varphi - \frac{n}{2} \cos \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \varphi, \\
G_1^{(n)} &= \left[ -\kappa + (-1)^n - \frac{n}{2} \right] \sin \frac{n}{2} \varphi + \frac{n}{2} \sin \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \varphi, \\
F_2^{(n)} &= \left[ \kappa - (-1)^n \pm \frac{n}{2} \right] \sin \frac{n}{2} \varphi + \frac{n}{2} \sin \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \varphi, \\
G_2^{(n)} &= \left[ \kappa + (-1)^n - \frac{n}{2} \right] \cos \frac{n}{2} \varphi + \frac{n}{2} \cos \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \varphi.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Die Koeffizienten  $a_0$  und  $b_0$  verbindet man mit der starren Körperverschiebung an der Rissspitze. Die nächsten Koeffizienten  $a_1$  und  $b_1$  sind die an der Rissspitze dominierenden Spannungen und werden mit den Spannungsintensitätsfaktoren in folgende Beziehung gestellt:

$$a_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}, \quad b_1 = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{2.98}$$

Die anderen Koeffizienten beschreiben den Verlauf der Spannungsfelder in der restlichen Umgebung von der Rissspitze. Es sei noch zu erwähnen, dass die  $T$ -Spannung, die eine konstante Spannung parallel zum Rissufer repräsentiert, mit  $a_2$  in Beziehung steht:

$$T = 4a_2. \tag{2.99}$$

Mit der gewonnenen Lösung lässt sich das Spannungsfeld um die Rissspitze angeben. Allerdings besitzt die Entwicklungsreihe einen Gültigkeitsbereich bzw. einen Konvergenzradius, der im Allgemeinen von dem gegebenen Randwertproblem abhängt. Wie später gezeigt wird, entspricht dieser zum Beispiel für den GRIFFITH-Riss genau der Risslänge.

## 2.4 Plattenbiegung

In erster Linie lässt sich die Theorie der Plattenbiegung in zwei Betrachtungsweisen bezüglich der BERNOULLISCHEN Hypothese aufteilen. Die klassische Plattentheorie bzw. KIRCHHOFFSCHE Theorie vernachlässigt die Schubverzerrungen infolge der Querkräfte. Demzufolge wird eine dünne Platte in der klassischen Plattentheorie als schubstarr angesehen (Bild 8a). Eine Erweiterung dieser Theorie auf schubweiche Platten ist mit dem Namen REISSNER [69,70] verbunden. Dabei wird eine pa-

parabolische Verteilung der Schubspannungen und ein linearer Verlauf der Biegespannung über die Dicke der Platte angenommen. Das Plattenmodell bietet schließlich ein System partieller Differentialgleichungen sechster Ordnung.

Unabhängig von REISSNER hat MINDLIN [71] ebenso eine Schubdeformationstheorie kleiner Durchbiegungen hergeleitet (Bild 8b, vgl. TIMOSHENKO-Balken). Hierbei wird ein linearer Verlauf der Verschiebungen im Gegensatz zur REISSNER-Theorie vorausgesetzt. Das MINDLINSche Modell führt auf eine biharmonische und HELMHOLTZsche Gleichung. Einen guten Überblick über die Unterschiede der beiden Theorien findet man in [72]. Beim schubelastischen Plattenmodell werden die Verformungen durch drei unabhängige Größen ( $\omega_r, \omega_\varphi$  als Querschnittsdrehwinkel und Durchbiegung  $w$ ) formuliert. Dabei nimmt man an, dass die Normale zur Plattenmittelfläche wie bei der klassischen Theorie gerade bleibt und es stellt sich ein Schubwinkel zur Berücksichtigung der Querschubverzerrungen ein. Eine gute Übersicht über die weitere verbesserte Plattenmodelle findet man z. B. bei PANC [73]. Im Rahmen dieser Arbeit wird die MINDLINSche Plattentheorie für das Sensor-konzept verwendet. In den nächsten Kapiteln wird ein kurzer Überblick über die wichtigsten Beziehungen in der KIRCHHOFFschen und MINDLINSchen Plattentheorie gegeben.

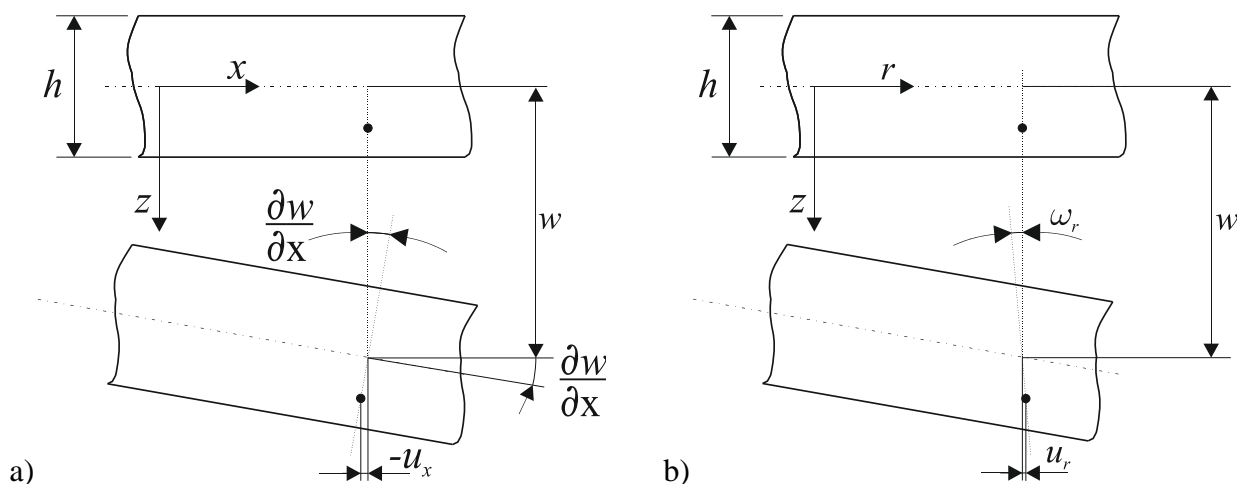


Bild 8: Plattenkinematik in  $(x, z)$  Ebene nach a) KIRCHHOFF Theorie und b) nach MINDLIN Theorie

### 2.4.1 Klassische Biegetheorie dünner Platten

Die klassische Plattentheorie beruht auf den im Folgenden aufgeführten Annahmen. Es wird die Homogenität und isotropes Materialverhalten vorausgesetzt. Außerdem wird sich in dieser Arbeit auf die konstante Plattensteifigkeit beschränkt. Die Normale zur Mittelfläche sowie die Plattendicke  $h$  der Platte bleibt vor und nach der Verformung erhalten. Aus diesem Grund ist die Durchbiegungsfunktion  $w$  nur eine Funktion der  $(x, y)$  Koordinaten. Die Normalspannungen  $\sigma_{zz}$  sind sehr viel kleiner gegenüber den  $\sigma_{xx}$ - und  $\sigma_{yy}$ -Spannungen anzusehen und daher gilt  $\sigma_{zz} = 0$  (ESZ). Unter diesen Voraussetzungen lassen sich alle für die KIRCHHOFFsche Theorie relevanten Gleichungen ableiten [74].

Die kinematischen Gleichungen folgen aus der Betrachtung des verformten Plattenelements (Bild 8a) in der  $(x, z)$  Ebene und analog dazu in der  $(y, z)$  Ebene. Für die Verschiebungen gilt demzufolge:

$$\begin{aligned}
w(x, y, z) &= w(x, y), \\
u_x(x, y) &= -z \sin \frac{\partial w}{\partial x} \approx -z \frac{\partial w}{\partial x}, \\
u_y &= -z \sin \frac{\partial w}{\partial y} \approx -z \frac{\partial w}{\partial y},
\end{aligned} \tag{2.100}$$

und mit den bekannten Beziehungen (2.21) ergeben sich die Verzerrungen zu:

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{2.101}$$

Damit stellen die Verzerrungen über die Plattendicke lineare Funktionen dar.

Bei der Betrachtung eines infinitesimal kleinen Plattenelements  $dV = h dx dy$  fasst man die an den Rändern auftretende Spannungen zu den Schnittgrößen je Schnittlänge (Bild 9) wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}
\text{Querkräfte} \quad q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz, & q_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz, \\
\text{Biegemomente} \quad m_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z dz, & m_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z dz, \\
\text{Torsionsmomente} \quad m_{xy} &= m_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Mit den definierten Schnittgrößen lassen sich am unverformten Plattenelement (Bild 9) Kräfte- und Momentengleichgewicht aufstellen. Die Änderung der Schnittgröße erfasst man durch die Entwicklung der TAYLOR-Reihe, wobei die Terme ab der 2. Ordnung vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned}
&\left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx - q_x dy - q_y dx = -p(x, y) dx dy, \\
&- \left( m_{xx} + \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} dx \right) dy - \left( m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy \right) dx + m_{xx} dy + m_{yx} dx \\
&\quad = -q_x dy \frac{dx}{2} - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2}, \\
&\left( m_{yy} + \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} dy \right) dx + \left( m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - m_{yy} dx - m_{xy} dy \\
&\quad = -q_y dx \frac{dy}{2} - \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dy}{2}.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Unter der Annahme, dass  $q_y \gg \frac{1}{2} \frac{\partial q_y}{\partial y} dy$ , erhält man die gesuchten Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p(x, y), \quad \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x, \quad \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y. \tag{2.104}$$

Die letzten beiden Gleichungen lassen sich durch entsprechende Differentiation und Einsetzen in die erste Gleichung kombinieren zu:

$$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2} = -p(x, y). \tag{2.105}$$

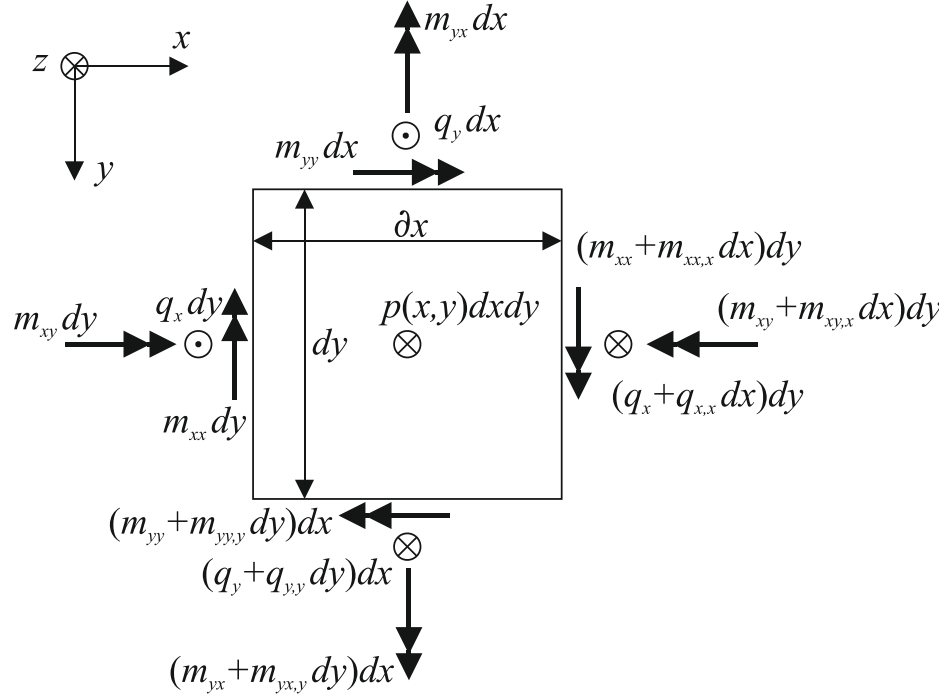


Bild 9: Plattenschnittgrößen

Über das HOOKEsche Gesetz können die Spannungen, die auch wie die Verzerrungen über die Plattendicke lineare Funktionen darstellen, ermittelt werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{yy} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (2.106)$$

Durch das Einsetzen der Gl. (2.106) in die Gl. (2.102) ergeben sich die Schnittmomente  $m_{xx}$ ,  $m_{yy}$  und  $m_{xy}$  mit der Biegesteifigkeit  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  zu:

$$\begin{aligned}m_{xx} &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ m_{yy} &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ m_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (2.107)$$

Die Querkräfte werden direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen Gl. (2.104) berechnet:

$$\begin{aligned}q_x &= -D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\}, \\ q_y &= -D \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\}.\end{aligned}\quad (2.108)$$

Schließlich erhält man die Differentialgleichung für die Plattendurchbiegung Gl. (2.109) durch Einsetzen der Gl. (2.108) oder Gl. (2.107) in die Gleichgewichtsbedingungen Gl. (2.104):

$$\Delta \Delta w(x, y) = \frac{p(x, y)}{D}.\quad (2.109)$$



Die sich so ergebende partielle Differentialgleichung vierter Ordnung verträgt nur zwei Randbedingungen pro Kante. Aus diesem Grund müssen in der Regel drei am Rand vorhandenen Bedingungen in zwei umkombiniert werden. Die inhomogene partielle Differentialgleichung lässt sich unter Beachtung der Randbedingungen am Plattenrand lösen. Das Vorgehen zur Lösung der homogenen Differentialgleichung ist ähnlich dem beim Scheibenproblem.

### 2.4.2 Spannungsintensitätsfaktoren für Riss in einer unendliche Platte

Wie auch für die Scheibe soll ein schlitzförmiger gerader Riss der Länge  $2a$  in einer unendlichen Platte betrachtet werden (Bild 10).

Mit Hilfe der komplexen Funktionstheorie nach GOURSAT lässt sich für die Durchbiegung  $w$  gemäß der Gl. (2.109) mit zwei komplexen Potentialen  $\phi$  und  $\chi$  zu:

$$w(x, y) = \Re[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)], \quad (2.110)$$

ansetzen. Damit kann das Spannungs- und Verschiebungsfeld Gl. (2.106), (2.101) und (2.100) mit komplexen Funktionen dargestellt werden. Mit dem komplexen Ansatz Gl. (2.110) in Verbindung mit Gl. (2.107) und (2.108) bekommt man für die Schnittgrößen, ähnlich den KOLOSOVSKEN Gleichungen für die Scheibe, folgende Beziehungen [60,58] :

$$\begin{aligned} m_{xx} + m_{yy} &= -4D(1+\nu)\Re(\phi'(z)), \\ m_{yy} - m_{xx} + 2im_{xy} &= 2D(1-\nu)(\bar{z}\phi''(z) + \chi''(z)), \\ \frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} &= \phi(z) + z\bar{\phi}'(z) + \bar{\chi}'(\bar{z}), \\ q_x - iq_y &= -4D\phi''(z). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Für die beiden Fälle der Plattenbiegung (Bild 10) ist die analytische Lösung des Problems bekannt [60].

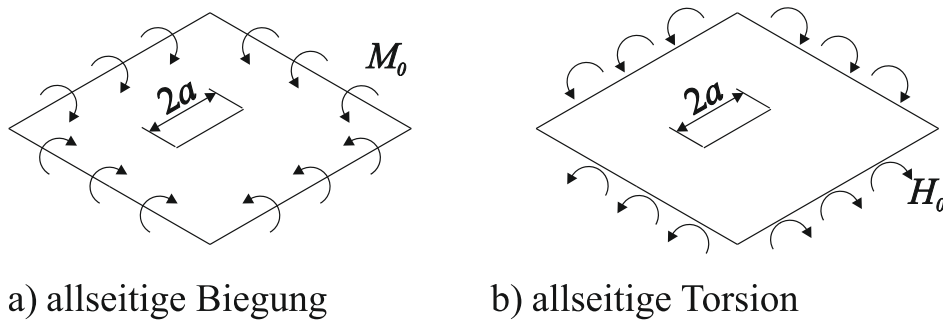


Bild 10: Plattenbiegung a) reiner Modus I b) reiner Modus II

Im Fall des reinen Modus I (Bild 10a unter allseitiger Belastung mit einem Biegemoment  $M_0$ ) sind die komplexen Spannungsfunktionen  $\phi(\zeta)$  und  $\chi(\zeta)$  mit:

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= -\frac{M_0 a}{4D(1+\nu)} \left[ \frac{1}{\zeta} + \zeta \frac{1-\nu}{3+\nu} \right], \\ \chi(\zeta) &= -\frac{M_0 a^2}{2D(3+\nu)(1-\nu)} [\zeta^2 - (1+\nu) \ln \zeta], \end{aligned} \quad (2.112)$$

und für den reinen Modus II (Bild 10b unter allseitiger Torsion mit einem Torsionsmoment  $H_0$ ) mit:

$$\begin{aligned}\phi(\zeta) &= -\frac{iH_0 a}{2D(3+v)}\zeta, \\ \chi(\zeta) &= \frac{iH_0 a^2}{4D} \left[ \frac{4}{(3+v)(1-v)} \ln \zeta + \frac{\zeta^2}{2(3+v)} + \frac{1+2\zeta^2}{2(1-v)\zeta^2} \right],\end{aligned}\quad (2.113)$$

gegeben. Die Transformation der Spannungspotentiale in die  $z$ -Ebene mit:

$$\frac{a}{\zeta} = z + \sqrt{z^2 - a^2}, \quad a\zeta = z - \sqrt{z^2 - a^2}, \quad (2.114)$$

(vgl. Gl.(2.76)) liefert für Gl. (2.112):

$$\begin{aligned}\phi(z) &= -\frac{M_0}{2D(1+v)(3+v)} \left[ 2z + (1+v)\sqrt{z^2 - a^2} \right], \\ \chi(z) &= -\frac{M_0}{2D(3+v)(1-v)} \left[ \left( z - \sqrt{z^2 - a^2} \right)^2 - (1+v)a^2 \ln \left( \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right) \right],\end{aligned}\quad (2.115)$$

und für Gl. (2.113):

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \frac{iH_0}{2(3+v)D} \left[ z - \sqrt{z^2 - a^2} \right], \\ \chi(z) &= \frac{iH_0 a^2}{8D(1-v)} \left[ 2 + \frac{(1-v)}{(3+v)} \frac{(z - \sqrt{z^2 - a^2})^2}{a^2} + \frac{a^2}{(z - \sqrt{z^2 - a^2})^2} + \frac{8}{(3+v)} \ln \left( \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{a} \right) \right].\end{aligned}\quad (2.116)$$

Im Rahmen der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie definiert man andere Spannungsintensitätsfaktoren  $(k_1, k_2)$  [58,75], als man es beim Scheibenproblem  $(K_I, K_{II})$  gewöhnt ist:

$$k_1 - ik_2 = -\frac{12\sqrt{2}D(3+v)}{h^2} \lim_{z \rightarrow z_0} \sqrt{z - z_0} \phi'(z). \quad (2.117)$$

Aus der Gl. (2.117) folgt für die unendliche Platte unter allseitiger Biegung  $M_0$ :

$$k_1 = \frac{6M_0}{h^2} \sqrt{a}, \quad k_2 = 0, \quad (2.118)$$

und unter allseitiger Torsion mit  $H_0$ :

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{6H_0}{h^2} \sqrt{a}. \quad (2.119)$$

### 2.4.3 Biegung schubelastischer Platten nach MINDLIN

Die schubelastische Plattentheorie berücksichtigt im Gegensatz zur klassischen Plattentheorie die Querschubverzerrungen (Bild 8b), die mit steigender Dicke an Einfluss zunehmen. Zur besseren Handhabung sollen die Plattengleichungen in Polarkoordinaten betrachtet werden. Aus dem Bild 8b ergeben sich die Verschiebungen zu:

$$\begin{aligned}u_r(r, \varphi, z) &\approx z\omega_r(r, \varphi), \\ u_\varphi(r, \varphi, z) &\approx z\omega_\varphi(r, \varphi), \\ w(r, \varphi, z) &\approx w(r, \varphi).\end{aligned}\quad (2.120)$$

und die Verzerrungen nach Gl. (2.21) zu:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= z \frac{\partial \omega_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{z}{r} \left( \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \varphi} + \omega_r \right), & \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{z}{2r} \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} - \omega_\varphi \right), \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \omega_r \right), & \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + r \omega_\varphi \right), & \varepsilon_{zz} &= 0.\end{aligned}\quad (2.121)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen Gl. (2.104) gelten unverändert wie bei der schubstarren Platte. Das Einsetzen der Verzerrungen (2.121) in das HOOKEsche Gesetz liefert die Spannungen mit:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \left( \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \varphi} + \omega_r \right) \right), & \sigma_{rz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \omega_r \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \varphi} + \omega_r \right) + \nu \frac{\partial \omega_r}{\partial r} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \frac{E}{2(1+\nu)r} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + r \omega_\varphi \right), \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{Ez}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} - \omega_\varphi \right) + \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} \right), & \sigma_{zz} &= 0.\end{aligned}\quad (2.122)$$

Die Integration der Spannungen in der Gl. (2.122) über die Plattendicke  $h$  entsprechend den Definitionsgleichungen für die Schnittgrößen (2.102) erhält man die Beziehungen für Schnittmomente und Querkräfte:

$$\begin{aligned}m_{rr} &= D \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \left( \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \varphi} + \omega_r \right) \right), & q_r &= \frac{Eh_s}{2(1+\nu)} \left\{ \omega_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right\}, \\ m_{\varphi\varphi} &= D \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \varphi} + \omega_r \right) + \nu \frac{\partial \omega_r}{\partial r} \right), & q_\varphi &= \frac{Eh_s}{2(1+\nu)r} \left\{ \frac{\partial w}{\partial \varphi} + r \omega_\varphi \right\}, \\ m_{r\varphi} &= \frac{1-\nu}{2} D \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} - \omega_\varphi \right) + \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} \right),\end{aligned}\quad (2.123)$$

wobei  $h_s$  als reduzierte Dicke, die die konstante Schubspannungsverteilung Gl. (2.122) berichtigen soll, eingeführt wird. Für die isotropen Platten wurde dieser Wert von REISSNER mit  $h_s = 5h/6$  (MINDLIN gibt den Schubkorrekturfaktor mit  $\pi^2/12$  an [71]) angegeben.

Um auf zwei Differentialgleichungen (biharmonische und HELMHOLTZsche Gleichung) zu kommen, ist es zwingend notwendig, folgende Funktionen einzuführen [76]:

$$\Phi = \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + \frac{\partial \omega_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\omega_r}{r}, \quad \Psi = \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial \omega_r}{r \partial \varphi} + \frac{\omega_\varphi}{r}. \quad (2.124)$$

Die aus den Gleichgewichtsbeziehungen in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} q_r + q_{r,r} + \frac{1}{r} q_{\varphi,\varphi} &= -p(r, \varphi), \\ \frac{1}{r} m_r + m_{r,r} - \frac{1}{r} m_\varphi + \frac{1}{r} m_{r\varphi,\varphi} &= q_r \\ \frac{1}{r} m_{\varphi,\varphi} + \frac{2}{r} m_{r\varphi} + m_{r\varphi,r} &= q_\varphi.\end{aligned}\quad (2.125)$$

resultierende Gleichung:

$$\frac{2}{r} m_{r,r} + m_{r,rr} - \frac{1}{r} m_{\varphi,r} + \frac{1}{r^2} m_{\varphi,\varphi\varphi} + \frac{2}{r^2} m_{r\varphi,\varphi} + \frac{2}{r^2} m_{r\varphi,r\varphi} = -p(r, \varphi). \quad (2.126)$$

ergibt in Verbindung mit den Schnittmomenten (Gl. (2.123)) und der Definition aus der Gl. (2.124) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$D \Delta \Phi = -p(r, \varphi). \quad (2.127)$$

Das Einsetzen der definierten Schnittmomente Gl. (2.123) in die Gleichgewichtsbeziehungen Gl. (2.125) liefert unter Beachtung der eingeführten Funktionen Gl. (2.124) die Verdrehungswinkel in folgender Form:

$$\begin{aligned}\omega_r &= -\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \Psi}{r \partial \varphi} \right), \\ \omega_\varphi &= -\frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left( \frac{\partial \Phi}{r \partial \varphi} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right).\end{aligned}\quad (2.128)$$

Setzt man wieder die Beziehungen aus der Gl. (2.128) in Gl. (2.124) ein, so erhält man zwei Differentialgleichungen:

$$\Phi = -\Delta w + \frac{h^2}{5(1-\nu)} \Delta \Phi, \quad (2.129)$$

$$\Delta \Psi - \frac{10}{h^2} \Psi = 0. \quad (2.130)$$

Anschließend liefert das Einsetzen der Gl. (2.129) in die Gl. (2.127) eine Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$\Delta \Delta \left( w - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \Phi \right) = \frac{p(x, y)}{D}. \quad (2.131)$$

Die HELMHOLTZsche Gleichung (2.130) und die Bipotentialgleichung (2.131) stellen somit ein Problem der sechsten Ordnung dar. Damit lassen sich genau drei Randbedingungen ohne Einführung von Ersatzquerkräften im Gegensatz zur klassischen Plattentheorie erfüllen.

Im Vergleich zur klassischen Plattentheorie ist derzeit keine vollständige analytische Lösung einer unendlichen Platte mit Riss der Länge  $2a$  unter allseitiger Biegung oder Torsion bekannt. In der Fachliteratur werden für die Rissprobleme der schubelastischen Platten eigene Spannungsintensitätsfaktoren ( $K_1, K_2$ ) definiert. Diese lassen sich für eine sehr kleine Plattendicke in die KIRCHHOFFschen Spannungsintensitätsfaktoren umrechnen (siehe Kapitel 4.1).

## 2.5 Inverses Problem

Im Rahmen dieser Arbeit soll anhand gemessener Signale auf die Rissspitzenposition und die Spannungsintensitätsfaktoren zurückgeschlossen werden. Solch ein Problem wird in der Mathematik als inverses Problem bezeichnet. Ein inverses Problem heißt korrekt gestellt, wenn

1. eine Lösung existiert,
2. diese Lösung eindeutig ist und
3. die Lösung stetig von den Eingangsdaten abhängt (Stabilität).

Die Verletzung einer dieser Bedingungen hat ein inkorrekt gestelltes Problem zur Folge. Es ist bekannt, dass sehr viele auf ein mathematisches Modell abgebildete reale physikalische Probleme (z.B. auch in der Computertomographie) nicht korrekt zu stellen sind. Unter anderem tragen Messfehler dazu bei, dass überhaupt keine Lösung des Problems existieren kann (Bedingung 1 ist verletzt) oder die Struktur des Problems führt zu Unstetigkeiten (Bedingung 3 ist verletzt). Damit liegen zwangsläufig inkorrekt gestellte Probleme vor. Diese müssen umformuliert werden. Dazu eig-

nen sich sogenannte Regularisierungstechniken (z.B. TIKHONOV-Regularisierung [77,78,79]. Das hier betrachtete Optimierungsproblem kann für verschiedene Ausgangsdaten zu gleichen oder ähnlichen Ergebnissen führen. Somit liegt ein schlecht gestelltes inverses Problem vor. Für die Lösung einer nichtlinearen Optimierungsaufgabe stehen verschiedene Lösungsalgorithmen zur Verfügung. Man unterscheidet zwischen lokalen und globalen Optimierungsalgorithmen. Die letzteren, wie simulated annealing [80], evolutionäre Algorithmen [81] usw., sind zum Auffinden des globalen Minimums spezialisiert. Sie sind jedoch in diesem Fall, wo die Lösung so schnell wie möglich gefunden werden soll, weniger geeignet. Die lokalen Optimierungsalgorithmen, wie NEWTON-Verfahren, LEVENBERG-MARQUARDT Verfahren [82], Principal Axis [83,84], neuronale Netze [85] usw., dagegen benötigen einen Startwert bzw. Startvektor in der Umgebung der eigentliche Lösung und konvergieren in der Regel schnell. Aus diesem Grund werden diese für die Problembehandlung in dieser Arbeit gewählt. Im Folgenden soll die Funktionsweise der lokalen Optimierungsalgorithmen kurz erklärt werden.

- NEWTON-Verfahren

Das NEWTON-Verfahren ist ein iteratives Standardverfahren zur numerischen Lösung von nichtlinearen Gleichungen und Gleichungssystemen. Für einen allgemeinen mehrdimensionalen Fall gilt:

$$x_{i+1} = x_i - (J(x_i))^{-1} F(x_i), \quad (2.132)$$

wobei  $i$  Iterationsschritt,  $x \in \mathbb{R}^n$  Vektor der Unbekannten,  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  zu minimierende Funktion und  $J(x)$  die JACOBI-Matrix von  $F(x)$  sind.

In den meisten Fällen erfordert es jedoch sehr nahe an den Zielwerten liegende Startwerte, um nicht in lokale Nebenminima zu gelangen.

- Levenberg-Marquardt Verfahren

Das LEVENBERG-MARQUARDT Verfahren ist ein numerischer Optimierungsalgorithmus zur Lösung nichtlinearer Probleme nach folgender Vorschrift:

$$x_{i+1} = x_i - (H(x_i) + \alpha_k \text{diag} H(x_i))^{-1} \nabla F(x_i), \quad (2.133)$$

wobei  $H(x)$  die HESSE-Matrix der Funktion  $F(x)$  und  $\alpha_k$  ein Parameter, der sich mit jedem Schritt ändert, sind.

Es konvergiert mit einer hohen Wahrscheinlichkeit auch bei schlechten Startwerten, dennoch ist die Konvergenz nicht garantiert. Wie schon beim NEWTON-Verfahren werden die Ableitungen der Funktion nach den Unbekannten benötigt.

- Principal-Axis Algorithmus

Das Verfahren wurde von R. P. BRENT entwickelt und zählt zu den besten Optimierungsalgorithmen, die keine Information über den Funktionsgradient benötigen. Es stellt eine Kombination von

inverser quadratischer Interpolation, Sekantenverfahren und Bisektion dar. Das Verfahren besitzt einige Besonderheiten im Vergleich zu den anderen Algorithmen, wie zum Beispiel die Annahme, dass lokale Minima Kurven zweiter Ordnung sind. Dieses Verfahren findet in der Regel die Anwendung, wo die Ableitung der Funktion schwer zu bestimmen ist. Allerdings erweist sich bei einer großen Anzahl von Unbekannten die Suche nach dem Minimum in alle Richtungen als schwierig.

- Neuronale Netze

Die Verwendung von neuronalen Netzen zur Lösung des inversen Problems wird in der Literatur [86,85] öfter vorgeschlagen. Besonders dort finden sie Anwendung, wo unbekannte nichtlineare Übertragungsfunktionen gesucht werden. Ein Programmpaket (SNNS – Stuttgart Neuronal Network Simulator [87]) ist frei verfügbar und kann zur Erstellung von verschiedenen Netzvarianten mit anschließender Umwandlung in die programmierte C-Funktion eingesetzt werden. In den meisten Fällen werden vorwärts betriebene neuronale Netze (feed forward multilayer perceptrons) als universelle Approximatoren angewendet.

Ein künstliches neuronales Netz besteht in der Regel aus mehreren Schichten, wobei die erste Schicht die Eingangsinformation und die letzte Schicht die Ausgangsdaten darstellt. Mit Hilfe eines Trainingsalgorithmus, z. B. den Backpropagation-Algorithmus, werden die Gewichte der Verbindungen zwischen den Neuronen berechnet, indem alle Trainingsdatensätze in zufälliger Reihenfolge viele Male propagiert werden.

- TIKHONOV-Regularisierung

Einen Ansatz zur regularisierten Lösung inkorrekturer nichtlinearer inverser Probleme bietet die aus der Theorie linearer Probleme bekannte TIKHONOV-Regularisierung. Diese überführt die Gleichung:

$$F(x) = y^\delta, \quad (2.134)$$

mit  $x \in D(F)$  für fehlerbehaftete Daten  $y^\delta \in Y$ , in das Minimierungsproblem:

$$\|F(x) - y^\delta\|_Y^2 + \alpha_T \|x - x^*\|_X^2 \rightarrow \min, \quad (2.135)$$

mit einem Referenzelement  $x^* \in X$ , gestörten Daten  $y^\delta \in Y$  und dem Regularisierungsparameter  $\alpha_T > 0$ . Die Formulierung in Gleichung (2.135) wird auch als regularisiertes Kleinste-Quadrate-Problem bezeichnet.

### 2.5.1 Messtechnik

Das Hauptelement der piezoelektrischen Messwertaufnehmer ist der Verstärker der elektrischen Signale. Man unterscheidet das Messprinzip in zwei Gruppen: Spannungsmessung und Ladungsmessung. Bei der Spannungsmessung ist die Ausgangsspannung proportional zur Eingangsspannung. Bei der Ladungsmessung ist die Spannung am Ausgang des Ladungsverstärkers proportional

zur Ladung am Eingang. In der Praxis verwendet man die Spannungsverstärker im Fall der dynamischen Messungen auf der Basis von Piezokeramiken [88]. Für die sich langsam ändernden Messgrößen nimmt man dagegen einen Ladungsverstärker. Hinsichtlich weiterer praktischer Details und genauerer Ausführungen sei auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen [89]. Die prinzipielle Funktionsweise der Spannungsmessung und Ladungsmessung beim piezoelektrischen Messwert-aufnehmer wird hier nur kurz erläutert.

### 2.5.2 Spannungsmessung

Die Spannungsverstärker besitzen den einfachen Aufbau nach Bild 11. Allerdings sind sie weniger praktikabel als die Ladungsverstärker. Die Signalverstärkung in dem Aufbau wie auf dem Bild 11 errechnet sich durch das Verhältnis der Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  nach folgender Formel:

$$U_{Aus} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} U_{Ein} = k_U U_{Ein} , \quad (2.136)$$

wobei  $k_U$  der Verstärkungsfaktor ist. Bei dem Spannungsverstärker spielt die Kabelkapazität eine große Rolle und beeinflusst das Messergebnis erheblich. Aus diesem Grund baut man den Verstärker direkt mit dem Sensor zusammen, so dass die Temperatureinflüsse und Erschütterungen gering gehalten werden,.

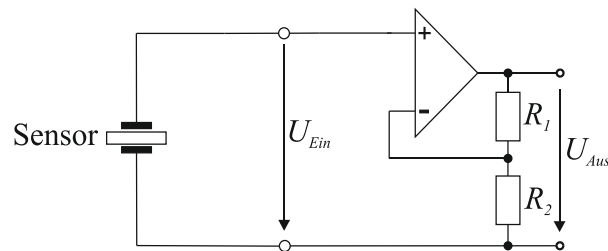


Bild 11: Ersatzschaltbild eines nicht invertierenden Spannungsverstärkers mit einem piezoelektrischen Sensor

### 2.5.3 Ladungsmessung

In der Praxis ist es üblich, an Stelle der Potentialmessung eine hochauflösende Ladungsmessung durchzuführen. Der vom Sensor erzeugte Strom  $i_{Ein}$  am Eingang des Operationsverstärkers (Bild 12) wird durch den rückgekoppelten Ladestrom  $i_f$  am Rückkoppelkondensator kompensiert, so dass  $U_{Ein} = 0$  gilt. Die sich dabei über den Rückkoppelkondensator aufbauende elektrische Spannung  $U_{Aus}$  wird am Ausgang des Operationsverstärkers registriert und ist ein Maß für die akkumulierte Ladungsmenge. Dies kann in vereinfachter Beziehung angegeben werden als:

$$U_{Aus} = \frac{Q_{Ein}}{C_f} = -\frac{Q_f}{C_f} , \quad (2.137)$$

wobei  $C_f$  die Kapazität des Rückkoppelkondensators angibt und  $Q = \int_0^t i \, dt$  ist.

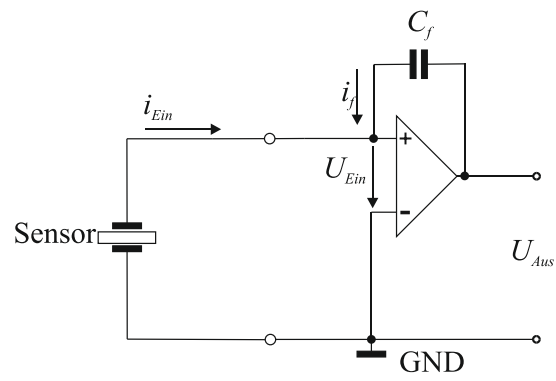


Bild 12: Schematische Darstellung des Ladungsverstärkers



### 3 Sensorkonzept für Risse in Scheiben

In ähnlicher Weise wie DMS kann die piezoelektrische Folie als Indikator für die Änderung der lokalen Dehnungsfelder eingesetzt werden. Im Gegensatz zum DMS werden die elektrischen Signale selbst von dem piezoelektrischen Material generiert und nicht als Widerstandsänderung interpretiert. Dazu wird die piezoelektrische Folie auf die Oberfläche der zu untersuchenden Struktur appliziert. Die auftretenden Dehnungen an der Strukturoberfläche werden auf die Folie in Folge der festen Verbindung übertragen, was das elektrische Signal an der Folienoberfläche erzeugt. Voraussetzung dafür ist die Polung der Folie über die Dickenrichtung. In Abhängigkeit von der Messmethode des elektrischen Signals erhält man entweder die elektrische Potentialdifferenz oder die elektrische Ladung als Maß für die auftretende Verzerrung. Einfache Annahmen, wie zum Beispiel ESZ an der Oberfläche eines isotropen Materials, ebenso ESZ in der Folie auf Grund der relativ kleinen Foliendicken eines transversalisotropen Sensormaterials, führen auf einen einfachen Zusammenhang zwischen Verzerrungen bzw. Spannungen und dem gemessenen elektrischen Signal  $U$  :

$$U = C^*(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = C^{**}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad (3.1)$$

wobei die Konstanten  $C^*$  und  $C^{**}$  die mechanischen, dielektrischen und piezoelektrischen Materialkonstanten der Struktur und der piezoelektrischen Folie beinhalten. Außerdem kann die Eigenschaft der Klebeverbindung in den Konstanten  $C^*$  und  $C^{**}$  berücksichtigt werden. Im Falle des Sensoreinsatzes in der Umgebung der Rissspitze kann für die Spannungskomponenten  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  die Nahfeldlösung Gl. (2.63) bzw. Gl. (2.64) verwendet werden. In weiteren Abschnitten soll der mathematische Zusammenhang zwischen den Sensorsignalen und Spannungs- sowie Dehnungsfeldern auf der Strukturoberfläche genauer betrachtet werden. Die vorgestellten Ergebnisse in den nächsten Kapiteln sind auch in [90,91,92,93,94] zu finden.

#### 3.1 Analytische Vorbetrachtungen

Die Annahme eines isotropen Grundwerkstoffs und ESZ an dessen Oberfläche soll weiterhin beibehalten werden. Ebenso soll der zu Recht angenommene ESZ in der Sensorfolie gelten. Es soll vorausgesetzt werden, dass keine Temperaturschwankungen auftreten ( $\theta = 0$  in der Gl. (2.57)). Somit geben die konstitutiven Beziehungen (Gl. (2.59) bis (2.62)) den Zusammenhang zwischen dem mechanischen, dielektrischen und piezoelektrischen Verhalten wieder. Diese Beziehungen vereinfachen sich, wie im Weiteren folgen wird, unter bestimmten Annahmen. Für die einfache Handhabung sollen die Beziehungen aus der Gl. (2.59) verwendet werden. In der VOIGT-Notation ergibt sich für den orthotropen PVDF Werkstoff die Gl. (2.59) zu:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{32} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & -\kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & -\kappa_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \\ -E_1 \\ -E_2 \\ -E_3 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

In den nächsten zwei Kapiteln soll zwischen zwei möglichen Messmethoden bezüglich der elektrischen Signale unterschieden werden.

### 3.1.1 Elektrische Potentialmessung

Bei dieser Methode versucht man durch bestimmte auferlegte Bedingungen die entstehende Potentialdifferenz  $\Delta\phi_{AB} = \phi_A - \phi_B$  über die Dicke  $h$  der piezoelektrischen Folie zu messen (Bild 13). Die Potentialdifferenz  $\Delta\phi_{AB}$  entspricht per Definition der elektrischen Spannung  $U_{AB}$ . Wie in dem Kapitel 2.5.2 erklärt wurde, lässt sich die Spannung  $U_{AB}$  um den Faktor  $k_U$  verstärken.

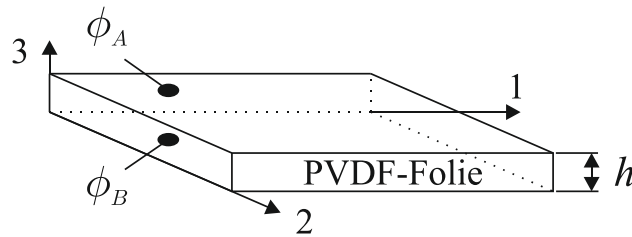


Bild 13: Potentialdifferenz an der Folie

Um hieraus den Rückschluss auf die Verzerrungen der Bauteiloberfläche ziehen zu können, ist die Herleitung eines Zusammenhangs zwischen gemessener elektrischer Spannung und den Verzerrungen der Folie erforderlich. Unter der Annahme eines linearen Potentialverlaufs in Dickenrichtung der Folie berechnet sich aus der Spannung  $U_{AB}$  die elektrische Feldstärke wie folgt:

$$E_3 = -\nabla\phi = -\frac{U_{AB}}{h} \quad (3.3)$$

Im Fall der Messung der elektrischen Potentialdifferenz zwischen der Ober- und Unterseite der Folie gilt außerdem für die dielektrische Verschiebung in Dickenrichtung  $D_3 = 0$ . Daneben ist aufgrund des herrschenden ESZ in der Folie  $\sigma_{33} = 0$  anzusetzen.

Aus den konstitutiven Beziehungen Gl. (3.2) lassen sich mit diesen Voraussetzungen die folgenden Zusammenhänge ablesen:

$$\sigma_{33} = c_{31}^E \varepsilon_{11} + c_{32}^E \varepsilon_{22} + c_{33}^E \varepsilon_{33} - e_{33} E_3 = 0, \quad (3.4)$$

$$D_3 = e_{31} \varepsilon_{11} + e_{32} \varepsilon_{22} + e_{33} \varepsilon_{33} + \kappa_{33} E_3 = 0. \quad (3.5)$$

Die Umstellung der Gl. (3.5) nach  $\varepsilon_{33}$  und Einsetzen in die Gl. (3.4) gibt die elektrische Feldstärke senkrecht zur Folie in Abhängigkeit von den Verzerrungen in der Folienebene wieder:

$$E_3 = C_{11}^* \varepsilon_{11} + C_{22}^* \varepsilon_{22}, \quad C_{11}^* = \frac{c_{31}^E e_{33} - c_{33}^E e_{31}}{e_{33}^2 + \kappa_{33} c_{33}^E}, \quad C_{22}^* = \frac{c_{32}^E e_{33} - c_{33}^E e_{32}}{e_{33}^2 + \kappa_{33} c_{33}^E}. \quad (3.6)$$

Mit den Materialkonstanten aus Kapitel 1.4 ergeben sich die Konstanten  $C_{11}^*$  und  $C_{22}^*$  zu:

$$C_{11}^* = -512435,93 \frac{\text{V}}{\text{mm}} \text{ und } C_{22}^* = -158465,33 \frac{\text{V}}{\text{mm}}.$$

Aus den Gleichungen (3.3) und (3.6) und unter Beachtung der Gl. (2.136) folgt der gesuchte Zusammenhang zwischen der an der Folie abgegriffenen elektrischen Spannung und den Verzerrungen zu:

$$U_{Aus} = -k_U h (C_{11}^* \varepsilon_{11} + C_{22}^* \varepsilon_{22}). \quad (3.7)$$

Die transversale Isotropie kann im Fall von orthotropen PVDF-Folien erreicht werden, indem zwei Folien um  $90^\circ$  gegeneinander verdreht und zusammengeklebt werden (Bild 14). Somit lässt sich die über die Dicke beider Folien zwischen den Messpunkten  $A, C$  mit  $h^{F1} = h^{F2} = h$  abgegriffene Spannung  $U_{Aus}$  wie folgt berechnen:

$$U_{Aus} = -k_U (E_3^{F1} h^{F1} + E_3^{F2} h^{F2}) = -k_U h (E_3^{F1} + E_3^{F2}). \quad (3.8)$$

Unter Beachtung von Gl. (3.6) sowie der Materialachsenausrichtung der Folien ergibt sich somit:

$$U_{Aus} = -k_U h C^* (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = -2k_U h \tilde{C}^* (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad (3.9)$$

mit

$$C^* = \frac{(c_{31}^E + c_{32}^E) e_{33} - (e_{31} + e_{32}) c_{33}^E}{e_{33}^2 + \kappa_{33} c_{33}^E},$$

bzw.

$$\tilde{C}^* = \frac{\tilde{c}_{31}^E e_{33} - c_{33}^E \tilde{e}_{31}}{e_{33}^2 + \kappa_{33} c_{33}^E}, \quad \tilde{c}_{31}^E = \frac{c_{31}^E + c_{32}^E}{2}, \quad \tilde{e}_{31} = \frac{e_{31} + e_{32}}{2}.$$

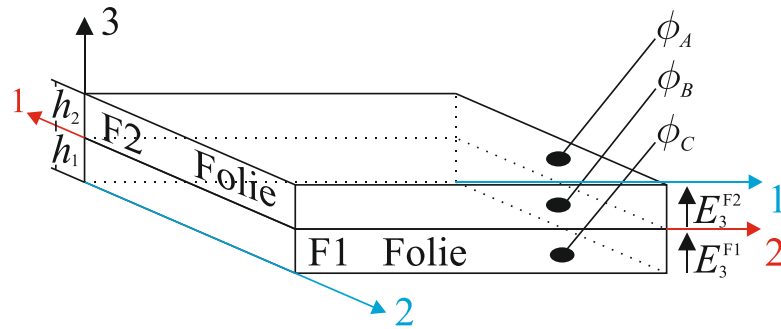


Bild 14: Zwei um  $90^\circ$  gegeneinander gedrehte, aufeinander geklebte orthotrope Folien (blau- Materialachsen der ersten Folie, rot-Materialachsen der gedrehten Folie)

### 3.1.2 Ladungsmessung

Da beim idealen Operationsverstärker  $U_{Ein} = 0$  (siehe Kapitel 2.5.3) gilt, ergibt sich aufgrund der Ladungsmessung die Potentialdifferenz zwischen den Messelektroden zu null und deshalb auch

$E_3 = 0$ . Aus den konstitutiven Gleichungen (3.2) folgt damit und unter der Annahme  $\sigma_{33} = 0$  (ESZ):

$$\sigma_{33} = c_{31}^E \varepsilon_{11} + c_{32}^E \varepsilon_{22} + c_{33}^E \varepsilon_{33} = 0, \quad (3.10)$$

$$D_3 = e_{31} \varepsilon_{11} + e_{32} \varepsilon_{22} + e_{33} \varepsilon_{33}, \quad (3.11)$$

und daraus:

$$D_3 = C_{11}^\# \varepsilon_{11} + C_{22}^\# \varepsilon_{22}, \quad (3.12)$$

mit den Konstanten

$$C_{11}^\# = \frac{c_{33}^E e_{31} - c_{31}^E e_{33}}{c_{33}^E} \quad \text{und} \quad C_{22}^\# = \frac{c_{33}^E e_{32} - c_{32}^E e_{33}}{c_{33}^E}.$$

Die Ladungsmenge an der Sensoroberfläche  $A$  im Bereich der Elektroden ergibt sich aus:

$$Q_{Ein} = - \oint_A D_3 dA. \quad (3.13)$$

Da die Elektrodenfläche relativ klein ist, kann ferner eine konstante dielektrische Verschiebung  $D_3$  unter der Elektrode angenommen werden. Damit und mit Gl. (2.137) sowie Gl. (3.12) folgt:

$$U_{Aus} = - \frac{A}{C_f} (C_{11}^\# \varepsilon_{11} + C_{22}^\# \varepsilon_{22}). \quad (3.14)$$

Für die transversal isotrope Folie gilt entsprechend folgender Zusammenhang:

$$U_{Aus} = - \frac{AC^\#}{C_f} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad (3.15)$$

$$\text{mit } C^\# = \frac{c_{33}(e_{31} + e_{32}) - e_{33}(c_{31} + c_{32})}{2c_{33}}.$$

### 3.1.3 Koordinatentransformation

Für den Fall des gegenüber dem Risskoordinatensystem gedrehten Folienkoordinatensystems müssen die Oberflächenverzerrungen des Bauteils in das Folienkoordinatensystem transformiert werden. Im Weiteren soll der obere Index  $F$  für die Folie und  $B$  für den Grundkörper (Bauteil) stehen, damit werden die Verzerrungen in der Folie als  $\varepsilon_{ij}^F$  und im Grundkörper als  $\varepsilon_{ij}^B$  gekennzeichnet. Das globale Koordinatensystem  $(x, y)$  soll durch die Risspitze gehen. Für die Folie wird das lokale Koordinatensystem  $(x', y')$  erklärt. Definiert man den Drehwinkel  $\beta$  zwischen den beiden Koordinatensystemen (Bild 15), so erhält man entsprechende Transformationsbeziehungen (siehe Gl. (2.43)):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^F &= \varepsilon_{11}^B \cos^2 \beta + \varepsilon_{22}^B \sin^2 \beta + 2\varepsilon_{12}^B \sin \beta \cos \beta, \\ \varepsilon_{22}^F &= \varepsilon_{11}^B \sin^2 \beta + \varepsilon_{22}^B \cos^2 \beta - 2\varepsilon_{12}^B \sin \beta \cos \beta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die Schubverzerrungen in der Folie  $\varepsilon_{12}^F$  müssen nicht berücksichtigt werden, da sie gemäß der Gl. (3.7) bzw. Gl. (3.14) keinen Einfluss auf das generierende elektrische Signal haben.

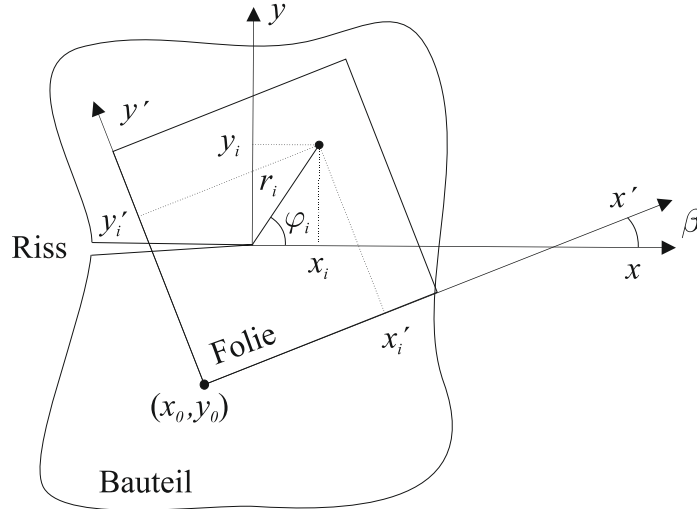


Bild 15: Risskoordinatensystem und Folienkoordinatensystem

Ebenso ist die Position der Messpunkte auf der Folie in das globale Koordinatensystem zu transformieren, wobei außer Drehung die Möglichkeit der Translation der Folie gegenüber der Risspitze zu beachten ist.

$$\begin{aligned} x_i &= x'_i \cos \beta - y'_i \sin \beta + x_0, & y_i &= x'_i \sin \beta + y'_i \cos \beta + y_0, \\ r_i &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, & \varphi_i &= \arccos \frac{x_i}{r_i}, & \varphi_i &= -\arcsin \frac{x_i}{r_i}, \\ & & 0 \leq \varphi_i \leq \pi, & & -\pi \leq \varphi_i < 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

### 3.1.4 Zusammenhang zwischen elektrischen Signalen und $K$ -Faktoren

Das HOOKESche Gesetz Gl. (2.33) unter Annahme des ESZ auf der Grundkörperoberfläche liefert:

$$\varepsilon_{11}^B = \frac{1}{E^B} (\sigma_{11} - \nu^B \sigma_{22}), \quad \varepsilon_{22}^B = \frac{1}{E^B} (\sigma_{22} - \nu^B \sigma_{11}), \quad \varepsilon_{12}^B = \frac{(1 + \nu^B)}{E^B} \sigma_{12}, \quad (3.18)$$

mit dem E-Modul  $E^B$  und der Querkontraktionszahl  $\nu^B$ .

Der Zusammenhang zwischen den bruchmechanischen Beanspruchungsgrößen  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $T$  und der gemessenen elektrischen Spannung bei einer Folie ergibt sich durch Einsetzen der Gleichungen (3.18) in (3.16) und des daraus folgenden Ergebnisses in (3.7) bzw. (3.9) im Fall der Spannungsmessung oder bei der Ladungsmessung in (3.14) bzw. (3.15) zu :

$$U_{Aus_i} = C_0 \{ \sigma_{xx} f_I + \sigma_{yy} f_{II} + \sigma_{xy} f_{III} \}, \quad (3.19)$$

wobei

$$\begin{aligned} f_I &= \cos^2 \beta (C_{11} - \nu^B C_{22}) + \sin^2 \beta (C_{22} - \nu^B C_{11}), \\ f_{II} &= \sin^2 \beta (C_{11} - \nu^B C_{22}) + \cos^2 \beta (C_{22} - \nu^B C_{11}), \\ f_{III} &= (1 + \nu^B) (C_{11} - C_{22}) \sin(2\beta), \end{aligned}$$

sind. Die Konstanten  $C_0$ ,  $C_{11}$  und  $C_{22}$  sind von der Art der Signalmessung abhängig.

Damit ergibt sich unter Beachtung der im Kapitel 2.3.5 vorgestellten WILLIAMSSchen Reihenentwicklung (2.96) für die Spannungsmessung im Punkt  $(r_i, \varphi_i)$  bzw.  $(x_i, y_i)$  an einer orthotropen piezoelektrischen Folie:

$$U_{Aus_i} = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} r_i^{\frac{n}{2}-1} \left\{ a_n (M_{11}^{(n)} f_I + M_{22}^{(n)} f_{II} + M_{12}^{(n)} f_{III}) + b_n (N_{11}^{(n)} f_I + N_{22}^{(n)} f_{II} + N_{12}^{(n)} f_{III}) \right\}, \quad (3.20)$$

mit  $C_0 = -\frac{k_U h}{E^B}$ , sowie  $C_{11} = C_{11}^*$ ,  $C_{22} = C_{22}^*$ , wobei  $a_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $a_2 = \frac{T}{4}$  und  $b_1 = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}$  sind.

Für den Fall der transversalen Isotropie folgt entsprechend:

$$U_{Aus_i} = C_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n r_i^{\frac{n}{2}-1} [a_n \cos \alpha_n - b_n \sin \alpha_n] \right\}, \quad (3.21)$$

wobei im Unterschied zur Gleichung (3.20) Konstante  $C_0 = -\frac{2k_U h C^*(1-\nu^B)}{E^B}$  und  $\alpha_n = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \varphi$  sind.

Entsprechend gilt dann für die Ladungsmessung:

$$U_{Aus_i} = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} r_i^{\frac{n}{2}-1} \left\{ a_n (M_{11}^{(n)} f_I + M_{22}^{(n)} f_{II} + M_{12}^{(n)} f_{III}) + b_n (N_{11}^{(n)} f_I + N_{22}^{(n)} f_{II} + N_{12}^{(n)} f_{III}) \right\}, \quad (3.22)$$

mit  $C_0 = -\frac{A}{E^B C_f}$ ,  $C_{11} = C_{11}^\#$ ,  $C_{22} = C_{22}^\#$ .

Für die transversal isotrope Folie gilt folgender Zusammenhang:

$$U_{Aus_i} = C_0 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n r_i^{\frac{n}{2}-1} [a_n \cos \alpha_n - b_n \sin \alpha_n] \right\}, \quad (3.23)$$

mit  $C_0 = -\frac{A C^\# (1-\nu^B)}{E^B C_f}$ .

Es ist ersichtlich, dass die Auswertformeln für beide Messverfahren sich nur in den Werten der Konstanten unterscheiden.

Eine Gleichung, die ähnlich der Gleichung (3.23) ist, wurde auch in [22] angegeben. Der Unterschied zu [22] besteht in den dort verwendeten größeren Abmessungen der Elektrodenfläche auf der Sensorfolie, wodurch über die Elektrodenfläche integriert werden muss. Außerdem sind in der Publikation nur die Terme der Reihenentwicklung bis  $n = 2$  genutzt.

## 3.2 Inverses Problem

Ausgehend von den gemessenen Potentialen  $U_{Aus}$ , die die Belastungssituation an der Risspitze indirekt wiedergeben, ist die Lösung eines inversen Randwertproblems der Elastizitätstheorie erforderlich, um auf den Verzerrungs- und Spannungszustand an der Bauteiloberfläche schließen zu können. Bei bekannter Rissposition relativ zur Folie sind die  $K$ -Faktoren, die  $T$ -Spannung und alle weiteren Glieder der Nahfeldlösung unbekannt. Beschränkt man sich auf  $K_I$ ,  $K_{II}$  und die  $T$ -Spannung, sind zur Bestimmung dieser drei Unbekannten drei unabhängige Gleichungen und demzufolge drei Messstellen, die relativ nah an die Risspitze platziert werden müssen, erforderlich. In diesem Fall liegt ein lineares Gleichungssystem vor, das eine eindeutige Lösung hat.

Tatsächlich soll aber mit Hilfe des Sensors auch ein möglicher Rissfortschritt verfolgt werden können. Damit ist neben den Intensitätsparametern und der  $T$ -Spannung auch die Rissposition a priori

unbekannt. Die Koordinaten der Messpunkte  $(r_i, \varphi_i)$  im rissfesten Koordinatensystem  $(x, y)$  stehen also nicht zur Verfügung. Wird ein lokales Koordinatensystem innerhalb der Folie eingeführt (Bild 15), lässt sich die Position jedes Messpunktes durch Koordinatentransformation auf das Risskoordinatensystem umrechnen. Zu den Beanspruchungsunbekannten kommen daher noch drei Unbekannte  $(x_0, y_0, \beta)$  hinzu, die die Folienposition relativ zur Rissspitze (Bild 15) beschreiben. Damit sind mindestens drei weitere Messpunkte und Gleichungen zu berücksichtigen.

Unter Beachtung aller Unbekannten ergibt sich eine nichtlineare Gleichung mit sechs Unbekannten. Zur Lösung sind demzufolge mindestens sechs Gleichungen erforderlich, die in Verbindung mit ebenfalls mindestens sechs Messelektroden die Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren, der  $T$ -Spannung und der Lage sowie der Orientierung der Rissspitze ermöglichen. Die Messstellen müssen dabei hinreichend nahe an der Rissspitze liegen, um den Gültigkeitsbereich der Gl. (2.96) für endliche  $n$  nicht zu verlassen. Da aufgrund der Nichtlinearität des Gleichungssystems eine Lösungsmannigfaltigkeit existiert, reichen zur eindeutigen Bestimmung der Lösung des inversen Problems sechs Messelektroden nicht aus und es sind weitere Messstellen in die Auswertung mit einzubeziehen.

Die prinzipiellen Möglichkeiten der im Kapitel 2.5 vorgestellten Algorithmen sollen kurz an einigen Beispielen betrachtet werden. Dazu werden zuerst die hypothetischen elektrischen Signale an einer orthotropen PVDF Folie mit vorgegebenen Spannungsintensitätsfaktoren,  $T$ -Spannung und der Folienlage nach Gl. (3.22) bestimmt. Die berechneten Signale sollen als die gemessenen Signale gelten. Daraus werden dann die Spannungsintensitätsfaktoren,  $T$ -Spannung und die Folienlage wiedergewonnen.

- NEWTON Verfahren

Das NEWTON Verfahren ist ein Standardverfahren zur numerischen Lösung von nichtlinearen Gleichungen und Gleichungssystemen. In den meisten Fällen erfordert es jedoch sehr nahe an den Zielwerten liegende Startwerte, um nicht in lokale Nebenminima zu gelangen.

In der Tabelle 1 sind die Ergebnisse der Rechnungen für zwei Beispiele vorgestellt. Hier ist zu erkennen, dass die Unbekannten  $(x_0, y_0, \beta)$  tatsächlich sehr nah an den Zielwerten sein müssen. Andernfalls liefert das NEWTON Verfahren falsche Ergebnisse oder konvergiert überhaupt nicht.

Tabelle 1 – Lösung des inversen Problems mit dem NEWTON-Verfahren

NEWTON Verfahren						
	Startwert	Soll	Ist	Startwert	Soll	Ist
$x_0$	-22,3	-22,0	-22,0	-21,3	-21,0	-21,0
$y_0$	-27,7	-27,0	-27,0	-23,7	-24,0	-24,0
$\beta$	-4,8	-5,0	-5,0	7,8	8,0	8,0
$K_I$	450,0	500,0	500,0	40,0	50,0	50,0
$K_{II}$	-10,0	-80,0	-80,0	600,0	625,0	625,0
$T$	-10,0	-30,0	-30,0	10,0	20,0	20,0

- LEVENBERG-MARQUARDT Lösungsalgorithmus

Aus der Tabelle 2 ist zu entnehmen, dass im Vergleich zum NEWTON Verfahren die Startwerte deutlich weiter von den Zielwerten entfernt liegen dürfen. Aber auch dem LEVENBERG-MARQUARDT Verfahren sind bei weiterer Entfernung der Startlösung von den Sollwerten Grenzen gesetzt. Eine größere Entfernung der Startlösung von den Sollwerten kann nur mit weiteren Messstellen bzw. Gleichungen ausgeglichen werden.

Tabelle 2 – Lösung des inversen Problems mit dem LEVENBERG-MARQUARDT Verfahren

LEVENBERG-MARQUARDT						
	Startwert	Soll	Ist	Startwert	Soll	Ist
$x_0$	-20	-22	-22	-19	-21	-21
$y_0$	-30	-27	-27	-26	-24	-24
$\beta$	-3	-5	-5	10	8	8
$K_I$	400	500	500	10	50	50
$K_{II}$	-15	-80	-80	550	625	625
$T$	-10	-30	-30	5	20	20

- Principal-Axis Verfahren

Das Principal-Axis Verfahren zeigt gegenüber dem LEVENBERG-MARQUARDT Verfahren deutliche Vorteile (Tabelle 3). Die Startlösung kann bei gleicher Anzahl verwendeter Gleichungen sehr grob vorgegeben werden.

Tabelle 3 – Lösung des inversen Problems mit dem Principal-Axis Verfahren

Principal-Axis						
	Startwert	Soll	Ist	Startwert	Soll	Ist
$x_0$	-18	-22	-22	-18	-21	-21
$y_0$	-32	-27	-27	-28	-24	-24
$\beta$	-1	-5	-5	2	8	8
$K_I$	400	500	500	10	50	50
$K_{II}$	-15	-80	-80	550	625	625
$T$	-10	-30	-30	5	20	20

- Künstliche neuronale Netze

Nachfolgend sei an einem Beispiel die Verwendung der neuronalen Netze erläutert. Als Eingangsgrößen dienen die elektrischen Potentiale, die den in Tabelle 4 angegebenen Situationen entsprechen. Die Ein- und Ausgangsgrößen werden auf das Intervall  $[0,1]$  normiert. Die erste Schicht des hier genutzten neuronalen Netzes enthält 16 Eingabeneuronen. Eine geringere Neuronenzahl führte zu keinem ausreichend genauen Ergebnis. Die zweite und dritte Schicht besteht jeweils aus 10 Neuronen und die Zahl der Ausgabeneuronen entsprach den sechs Unbekannten.



Tabelle 4 – Trainingsbereich für das neuronale Netz

Ausgangsgrößen des Trainingsdatensatzes		
	Satz 1	Satz 2
$x_0$	-27	-23
$y_0$	-27	-23
$\beta$	-3	3
$K_I$	400	600
$K_{II}$	-100	100
$T$	-20	20

In der Tabelle 5 sind die Ergebnisse vorgestellt. Es ist zu sehen, dass das neuronale Netz für die Datensätze, die im Trainingsintervall liegen, die richtigen Ergebnisse liefert. Eingangsgrößen, die Ausgangsgrößen entsprechen, die zwischen den trainierten Daten liegen, ergeben dagegen eine schlechte Approximation. Demzufolge ist es erforderlich, das neuronale Netz auf weitere Datensätze zu trainieren. Dies bedeutet aber einen zahlenmäßigen Anstieg der notwendigen Neuronen in den verdeckten Schichten. Dennoch geht bei größerer Anzahl der Trainingsmuster der Gesamtnetzfehler nur langsam gegen null, wird aber nie null.

Tabelle 5 – Lösung des inversen Problems mit neuronalen Netzen

Neuronale Netze						
	Soll	Ist	Soll	Ist	Soll	Ist
$x_0$	-23,00	-23,00	-27,00	-26,98	-25,00	-25,56
$y_0$	-23,00	-23,01	-27,00	-27,00	-25,00	-25,80
$\beta$	-3,00	-3,00	3,00	2,99	0,00	-1,50
$K_I$	400,00	400,00	600,00	600,00	500,00	480,00
$K_{II}$	-100,00	-100,00	100,00	100,00	0,00	-20,00
$T$	-20,00	-19,99	20,00	20,00	0,00	-10,00

Die Vergrößerung der Anzahl von Eingangsneuronen bzw. Messdaten würde mehr Information in das Netz bringen, doch ist momentan die maximale Anzahl der Messelektroden des Sensors durch den Hersteller auf 49 begrenzt. Das bedeutet, dass gegenwärtig der Einsatz von neuronalen Netzen für die Lösung der Aufgabe nur bedingt möglich ist.

### 3.2.1 Simulation von Messfehlern

Die im vorigen Abschnitt aufgeführten Beispiele basieren auf der Annahme fehlerfreier und ungestörter Messsignale, was praktisch nicht der Fall sein wird. Deshalb werden die (analytisch simulierten) Messsignale mit einem zufälligen Fehler in der Größenordnung von bis zu  $\pm 2\%$  versehen:

$$\begin{aligned}
 U_i^{\text{berechnet}} &= f(x_0, y_0, \beta, K_I, K_{II}, T, x'_i, y'_i), \\
 \text{Zufallszahl } z &= [-2; 2], \\
 U_i &= \left(1 + \frac{z_i}{100}\right) U_i^{\text{berechnet}}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

In den folgenden Tabellen werden die Ergebnisse dieser Simulation vorgestellt.

Tabelle 6 – Lösung der inversen Aufgabe bei gestreuten Eingangsdaten mit dem NEWTON Verfahren

NEWTON Verfahren						
	6 Elektroden			6 Elektroden		
	Startwert	Soll	Ist	Startwert	Soll	Ist
$x_0$	-22,3	-22,0	-19,2	-21,3	-21,0	-21,0
$y_0$	-27,7	-27,0	-30,7	-23,7	-24,0	-24,0
$\beta$	-4,8	-5,0	-7,8	7,8	8,0	8,0
$K_I$	450,0	500,0	580,0	40,0	50,0	50,0
$K_{II}$	-10,0	-80,0	-110,0	600,0	625,0	625,0
$T$	-10,0	-30,0	-10,0	10,0	20,0	20,0

Tabelle 7 – Lösung der inversen Aufgabe bei gestreuten Eingangsdaten mit dem LEVENBERG-MARQUARDT Verfahren

LEVENBERG-MARQUARDT						
	6 Elektroden			16 Elektroden		
	Startwert	Soll	Ist	Startwert	Soll	Ist
$x_0$	-20,0	-22,0	-21	-19,0	-22	-22,05
$y_0$	-30,0	-27,0	-28,3	-25,0	-27	-26,99
$\beta$	-3,0	-5,0	-1,9	-3,0	-5	-5,06
$K_I$	400,0	500,0	494,0	400,0	500,0	493,3
$K_{II}$	-15,0	-80,0	-106,0	-40,0	-80,0	-78,4
$T$	-10,0	-30,0	-28,0	-10,0	-30,0	29,6

Tabelle 8 – Lösung der inversen Aufgabe bei gestreuten Eingangsdaten mit dem Principal-Axis Verfahren

Principal-Axis						
	6 Elektroden			16 Elektroden		
	Startwert	Soll	Ist	Startwert	Soll	Ist
$x_0$	-18,0	-22,0	-19,7	-19,0	-22,0	-22,0
$y_0$	-32,0	-27,0	-28,5	-25,0	-27,0	-27,0
$\beta$	-1,0	-5,0	-4,3	-3,0	-5,0	-5,0
$K_I$	400,0	500,0	512,0	400,0	500,0	495,6
$K_{II}$	-15,0	-80,0	-75,0	-40,0	-80,0	-79,2
$T$	-10,0	-30,0	-30,0	-10,0	-30,0	-29,6

Tabelle 9 – Lösung der inversen Aufgabe bei gestreuten Eingangsdaten mit neuronalen Netzen

neuronale Netze						
	16 Elektroden		16 Elektroden		16 Elektroden	
	Soll	Ist	Soll	Ist	Soll	Ist
$x_0$	-23,0	-23,0	-27,0	-26,5	-25,0	-23,0
$y_0$	-23,0	-23,9	-27,0	-26,1	-25,0	-23,0
$\beta$	3,0	1,5	3,0	22,0	0,0	0,0
$K_I$	400,0	400,0	600,0	600,0	500,0	593,9
$K_{II}$	100,0	-99,0	100,0	99,0	0,0	-62,0
$T$	-20,0	-19,9	20,0	19,0	0,0	1,3

Aus der Tabelle 6 ist ersichtlich, dass das NEWTON Verfahren nicht geeignet ist. Aus diesem Grund wird auf die weitere Verwendung dieses Algorithmus verzichtet.

Tabelle 7 und Tabelle 8 zeigen, dass sich das LEVENBERG-MARQUARDT Verfahren bzw. das Principal-Axis Verfahren gut zur Lösung des inversen Problems eignen. Im Vergleich zu nur sechs Messstellen ( $2 \times 3$ , entsprechend der Anzahl der Unbekannten) liefern 16 Messstellen ( $4 \times 4$ ) deutlich bessere Ergebnisse. Daraus folgt, dass sich Messfehler mit einer entsprechend hohen Anzahl von Messstellen kompensieren lassen.

Die neuronalen Netze (Tabelle 9) zeigen sich robuster gegenüber Messfehlern. Die Ungenauigkeit liegt hier an dem zu hohen Abstand von den trainierten Datensätzen. Allerdings haben die Netze gegenüber den anderen Lösungsverfahren einen deutlichen Nachteil: sie müssen für jede Folienkonfiguration bzw. Elektrodenanzahl sowie Elektrodenanordnung neu trainiert werden.

### 3.3 Minimale Risslänge

Im Kapitel 3.6 wird das Sensorkonzept am Griffiths Riss der Länge  $2a$  erprobt. Der Konvergenzradius der Taylorreihenentwicklung der in der WILLIAMSSchen Reihe auftretenden analytischen Funktionen beträgt dabei ebenfalls  $2a$ . Dieser Radius kann als Referenzradius angesehen werden, innerhalb dessen die Messpunkte liegen müssen. Allerdings wird dabei eine unendliche Zahl von Reihentermen vorausgesetzt. Aus praktischen Gründen wird die Reihe aber auf fünf Terme beschränkt. Dadurch verringert sich der Radius, innerhalb dessen die Messpunkte liegen müssen auf  $a/2$ , um den Fehler bei der Bestimmung der  $K$ -Faktoren auf maximal 10% zu beschränken (vgl. z.B. Bild 51). Außerdem ergeben sich für  $n = 5$  nur 10 unbekannte Koeffizienten der WILLIAMS-Reihe plus die 3 Unbekannten der Risslage. Folglich sind mindestens 13 Messpunkte erforderlich. Dies entspricht einem Sensorfeld von  $4 \times 4$  Messpunkten im Abstand von derzeit technisch realisierbaren 2 mm. Daraus ergibt sich im ungünstigsten Fall eine minimal beobachtbare Risslänge von ca. 10 mm (Bild 16).

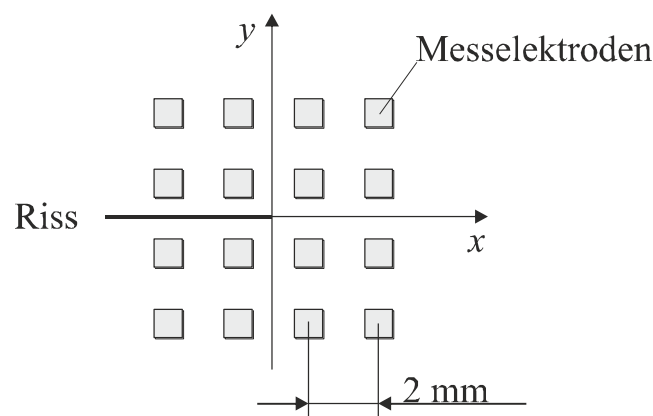


Bild 16: Messelektrodenanordnung

### 3.4 Einfluss der Elektrodengröße

Im theoretischen Modell stellen die Messelektroden infinitesimale Punkte dar, wogegen in der Realität diese eine endliche Fläche aufweisen. Demzufolge stellt das Messsignal einen über die Sensorfläche gemittelten Wert dar. Dieser Mittelwert lässt sich im theoretischen Modell in erster Nähe-

rung (bei Vernachlässigung der piezoelektrischen Kopplung) durch Mittelung der aus der Gl. (3.20) folgenden elektrischen Potentiale (3.25) über die Elektrodenfläche  $A$  berechnen. Im Fall der Ladungsmessung gilt Entsprechendes für die dielektrische Verschiebung.

$$U_{eff} = \frac{1}{A} \int_A U \, dA, \quad \text{bzw.} \quad D_{eff} = \frac{1}{A} \int_A D_3 \, dA. \quad (3.25)$$

Zur Demonstration soll ein konkretes Beispiel im Fall der Potentialmessung betrachtet werden. Es sei eine Probe unter Zug mit  $K_I = 500 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$  belastet und die Messelektrode mit den Abmessungen  $0,5 \times 0,5 \text{ mm}^2$  liegt 2 mm vor der Risspitze direkt auf dem Ligament. Nach Gl. (3.20) beträgt das Potential an der Stelle  $U = 31,54 \text{ V}$  und nach Gl. (3.25) ist es  $U_{eff} = 31,24 \text{ V}$ . Durch die Mittelung entsteht also ein Fehler von ungefähr 0,38%. Aus diesem Grund ist die Annahme der Elektroden als Punktfläche gerechtfertigt.

### 3.5 Numerische Simulationen des Systems Struktur-Sensorfolie

#### 3.5.1 FEM-Modell

Die Erprobung der Lösungsstrategien erfolgt anhand numerischer Simulationen des Systems Struktur-Sensorfolie und so berechneter elektrischer Potentiale. Ausgehend von den Erfahrungen zu den verwendeten Lösungsverfahren (Kapitel 3.2) werden nur die Ergebnisse des Principal-Axis Verfahrens und des LEVENBERG-MARQUARDT Verfahrens einander gegenübergestellt.

Der scheibenförmige Prüfkörper (Bild 17) hat die Abmessungen (H x L x B) 10 mm x 250 mm x 750 mm und einem Außenriss der Länge 25 mm. Die Folie hat die Maße (H x L x B) 0,1 mm x 50 mm x 50 mm und trägt 49 Messsensoren mit einer jeweiligen Fläche von 0,5 mm x 0,5 mm, die in regelmäßigen Abständen von 5 mm zueinander angeordnet sind.

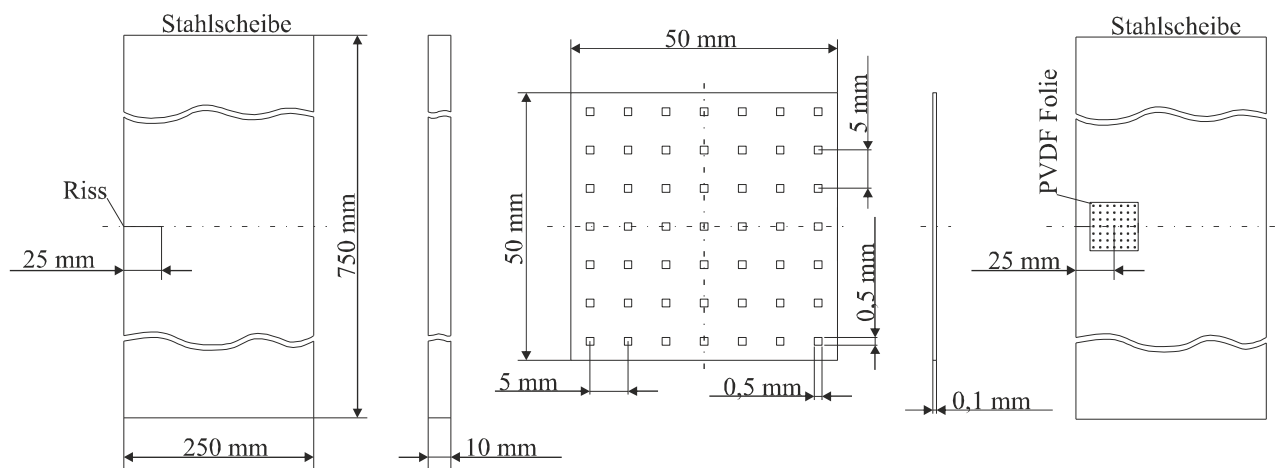


Bild 17: Scheibe mit Riss und Sensorfeld mit Elektroden (Maße in mm)

In Bild 18 ist der Sensorbereich vergrößert dargestellt. Die dunklen Flächen stellen die Messelektroden auf der PVDF-Folie dar. Aufgrund der hohen Zähigkeit und Bruchdehnung des PVDF wird davon ausgegangen, dass der Riss die Folie nicht schädigt. Die Folie wird den geöffneten Risspfad durch lokal große Verformungen überbrücken.

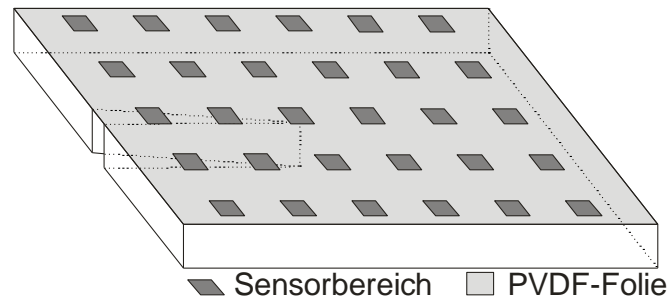


Bild 18: Schematische Darstellung des Systems Struktur-Sensorfolie-Elektroden

Die numerische Lösung des Randwertproblems Struktur mit Riss und applizierter Sensorfolie erfolgt mit dem kommerziellen FEM-Programm ABAQUS bei verschiedenen Modus I und Modus II sowie Mixed-Mode-Belastungen. Für den Werkstoff der Scheibe wurden die elastischen Konstanten von Stahl  $E^B = 210 \text{ GPa}$  und  $\nu^B = 0,3$  gewählt. Der Verstärkungsfaktor der gemessenen Spannung wird auf  $k_U = 1$  festgesetzt. Die PVDF-Folie wird als orthotroper piezoelektrischer Werkstoff modelliert. Die Position der Folie relativ zum Riss sowie der Winkel zwischen Riss und Folie kann variiert werden. Relativbewegungen zwischen Folie und Platte werden nicht zugelassen. Durch die im FE-Modell umgesetzte Bedingung, dass das Potential innerhalb einer Elektrode konstant ist, wird jeweils implizit die Integration der lokalen Potentiale vorgenommen, Gl. (3.25). Für alle Messelektroden an der Unterseite der Folie wird das elektrische Potential auf null gesetzt.

Im Weiteren werden folgende Abkürzungen eingeführt: RL – Referenzlösung, PA – Principal-Axis, LM – LEVENBERG-MARQUARDT, S – Lösungsstartwerte, Unb. – Unbekannte, Meth. – Methode. Die numerisch berechneten Potentiale werden als gemessene Elektrodenpotentiale angesehen und dienen nunmehr als Eingangsgrößen. Die Messelektroden, die sich direkt über dem Rissufer befinden, wurden nicht für die Auswertung verwendet.

In Tabelle 10 bis Tabelle 14 sind Ergebnisse der Berechnungen dargestellt. Bei der PA-Methode wurden für die Rissnahfeldlösung stets drei anstelle der in den Gl. (2.96) aufgeführten zwei Reihenglieder berücksichtigt, wohingegen mit Ausnahme von Tabelle 12 bei der LM-Methode nur zwei Glieder verwendet wurden.

Tabelle 10 – Lösung für zwei unterschiedliche Startwerte S bei reiner Modus I Belastung

Meth. Unb.	RL	S	PA	LM	S	PA	LM
$x_0$ [mm]	-25,00	-22,00	-24,60	-25,26	-28,00	-25,24	-25,13
$y_0$ [mm]	-25,00	-22,00	-25,00	-25,01	-28,00	-25,00	-24,97
$\beta$ [Grad]	0,00	3,00	0,00	0,01	-5,00	0,00	0,01
$K_I$ [MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	508,00	550,00	464,43	446,66	600,00	446,84	441,98
$K_{II}$ [MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	0,00	50,00	0,00	0,05	100,00	0,00	-1,18
$T$ [MPa]	-20,00	-10,00	-12,17	-15,37	-30,00	-12,55	-15,23

Tabelle 11 – Lösung für zwei unterschiedliche S bei Mixed Mode Belastung

Meth. Unb.	RL	S	PA	LM	S	PA	LM
$x_0$ [mm]	-25,00	-22,00	-24,41	-24,46	-28,00	-24,41	-25,27
$y_0$ [mm]	-25,00	-22,00	-25,05	-24,69	-28,00	-25,05	-24,58
$\beta$ [Grad]	0,00	3,00	0,34	-0,28	-5,00	0,34	-1,12
$K_I$ [MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	1194,00	1000,00	1142,22	1119,64	900,00	1142,22	1035,64
$K_{II}$ [MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	123,00	150,00	43,04	25,16	90,00	43,04	35,40
$T$ [MPa]	-59,00	-65,00	-28,96	-39,03	-40,00	-28,96	-34,05

Tabelle 12 – Lösung für zwei unterschiedliche S bei reiner Modus II Belastung

Meth. Unb.	RL	S	PA	LM	S	PA	LM
$x_0$ [mm]	-25,00	-23,00	-25,75	-24,44	-25,00	-25,52	-24,51
$y_0$ [mm]	-25,00	-23,00	-24,38	-24,50	-25,00	-24,27	-25,50
$\beta$ [Grad]	0,00	5,00	-2,42	2,66	0,00	-2,05	1,48
$K_I$ [MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	-202,00	-100,00	-175,74	-93,82	-202,00	-173,38	-129,41
$K_{II}$ [MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	85,00	100,00	43,64	64,18	85,00	51,48	47,09
$T$ [MPa]	10,00	15,00	4,14	2,51	10,00	4,06	4,09

Tabelle 13 – Lösung für zwei unterschiedliche S bei Mixed Mode Belastung

Meth. Unb.	RL	S	PA	LM	S	PA	LM
$x_0$ [mm]	-28,96	-29,00	-28,41	-27,83	-31,00	-28,44	-26,43
$y_0$ [mm]	-20,28	-21,00	-20,90	-20,96	-23,00	-21,50	-23,64
$\beta$ [Grad]	-10,00	-11,00	-10,58	-10,44	-12,00	-9,16	-4,12
$K_I$ [MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	501,00	510,00	491,19	444,78	550,00	500,06	416,02
$K_{II}$ [MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	60,00	60,00	68,75	62,80	80,00	66,11	79,21
$T$ [MPa]	-17,00	-20,00	-7,41	-8,54	-25,00	-5,67	-3,43

Tabelle 14 – Lösung für zwei unterschiedliche S bei reiner Modus I Belastung, aber anderer Rissposition als in Tabelle 10

Meth. Unb.	RL	S	PA	LM	S	PA	LM
$x_0$ [mm]	-20,00	-17,00	-19,53	-19,26	-22,00	-19,53	-19,40
$y_0$ [mm]	-25,00	-22,00	-25,00	-24,98	-27,00	-25,00	-24,99
$\beta$ [Grad]	0,00	3,00	0,00	-0,44	-3,00	0,00	0,02
$K_I$ [MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	508,00	400,00	484,50	482,96	600,00	484,50	481,73
$K_{II}$ [MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	0,00	10,00	0,00	-0,02	-10,00	0,00	-0,20
$T$ [MPa]	-20,00	-25,00	-15,44	-18,14	-15,00	-15,44	-18,01

Aus den Ergebnissen kann geschlossen werden, dass in dem für Ermüdungsrisswachstum charakteristischen Fall einer überwiegenden Modus I Belastung die aus der inversen Problemstellung gefundene Lösung gut mit der Referenzlösung übereinstimmt. Insbesondere die für die Rissposition relevanten Koordinaten ( $x_0, y_0, \beta$ ) werden sehr gut ermittelt. Der Fehler für den  $K_I$ -Faktor beträgt maximal 10%. Die berechnete  $T$ -Spannung zeigt deutliche Abweichungen zur Referenzlösung. Außerdem ist festzustellen, dass die PA-Methode im Vergleich zur LM-Methode weniger empfind-

lich gegenüber der Startlösung ist. Des Weiteren wurde für eine reine Modus I Belastung mit geradliniger Rissausbreitung  $\beta = 0$  beobachtet, dass die Messwerte der Elektroden direkt vor dem Riss ausreichen, um der richtigen Lösung nahe zu kommen. Im Falle einer dominierenden Modus II Belastung (Tabelle 12) konnte kein ausreichender Erfolg erzielt werden. Die Ursache für die ungenaue Bestimmung des  $K_{II}$ -Faktors könnte in der Positionierung der Messelektroden liegen. Um die Ursache genauer zu überprüfen, wird im Folgenden das Konzept am GRIFFITH-Riss im isotropen Material erprobt und verifiziert. Es zeigt sich, dass die Positionierung der Messelektroden näher zur Rissspitze hin und mit kleinerem Abstand untereinander erfolgen muss. Damit gelingt sowohl eine genaue Bestimmung des  $K_I$  als auch  $K_{II}$  - Faktors.

### 3.6 Erprobung der Messmethode am GRIFFITH-Riss

Die hypothetische Erprobung der Messmethode erfolgt am Beispiel des GRIFFITH-Risses. Eine unendliche Scheibe mit einem Riss der Länge  $2a$  repräsentiert das Bauteil (Bild 19). Die PVDF-Folie ist auf der Oberfläche der Scheibe über den Riss appliziert und stellt die elektrischen Signale für die Auswertung über eine hier noch nicht festgelegte Anzahl  $N$  ( $N = 4, 5, 6, \dots, 16$ ) von Elektroden (Messpunkten) bereit.

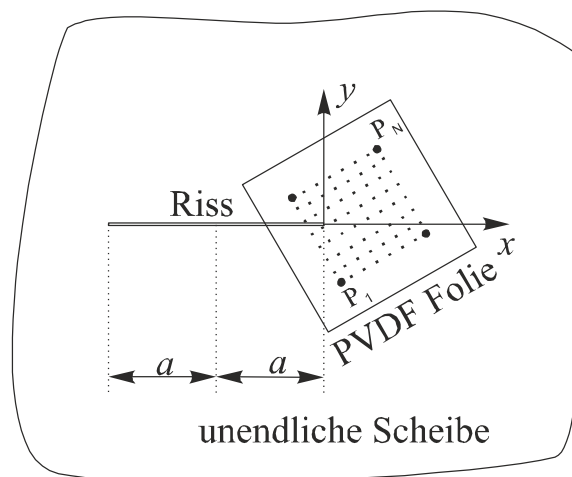


Bild 19: Bauteil mit applizierter PVDF Folie und Elektroden  $P_1, P_2, \dots, P_N$

#### 3.6.1 Theoretische Genauigkeit der Messmethode

Aus der als bekannt vorausgesetzten analytischen Lösung für den GRIFFITH-Riss [58] können die in der Folie auftretenden Verzerrungen bestimmt und zur Berechnung der hypothetischen Messsignale nach Gl. (3.14) genutzt werden. Zur Auswertung der hypothetischen Messsignale wird die Gl. (3.22) mit einer praktisch begrenzten endlichen Anzahl von Reihentermen verwendet (siehe Anhang A.2).

Im Anhang A.2 ist gezeigt, dass für den GRIFFITH-Riss der maximale Geltungsbereich der WILLIAMSSchen Reihe (mit unendlich vielen Reihentermen) auf einen Radius  $2a$  um die Rissspitze begrenzt ist. Aufgrund der praktisch begrenzten Anzahl von Reihentermen kann dieser Bereich nicht vollständig zur Platzierung der Elektroden (Messpunkte) genutzt werden. Der Bereich, in dem die

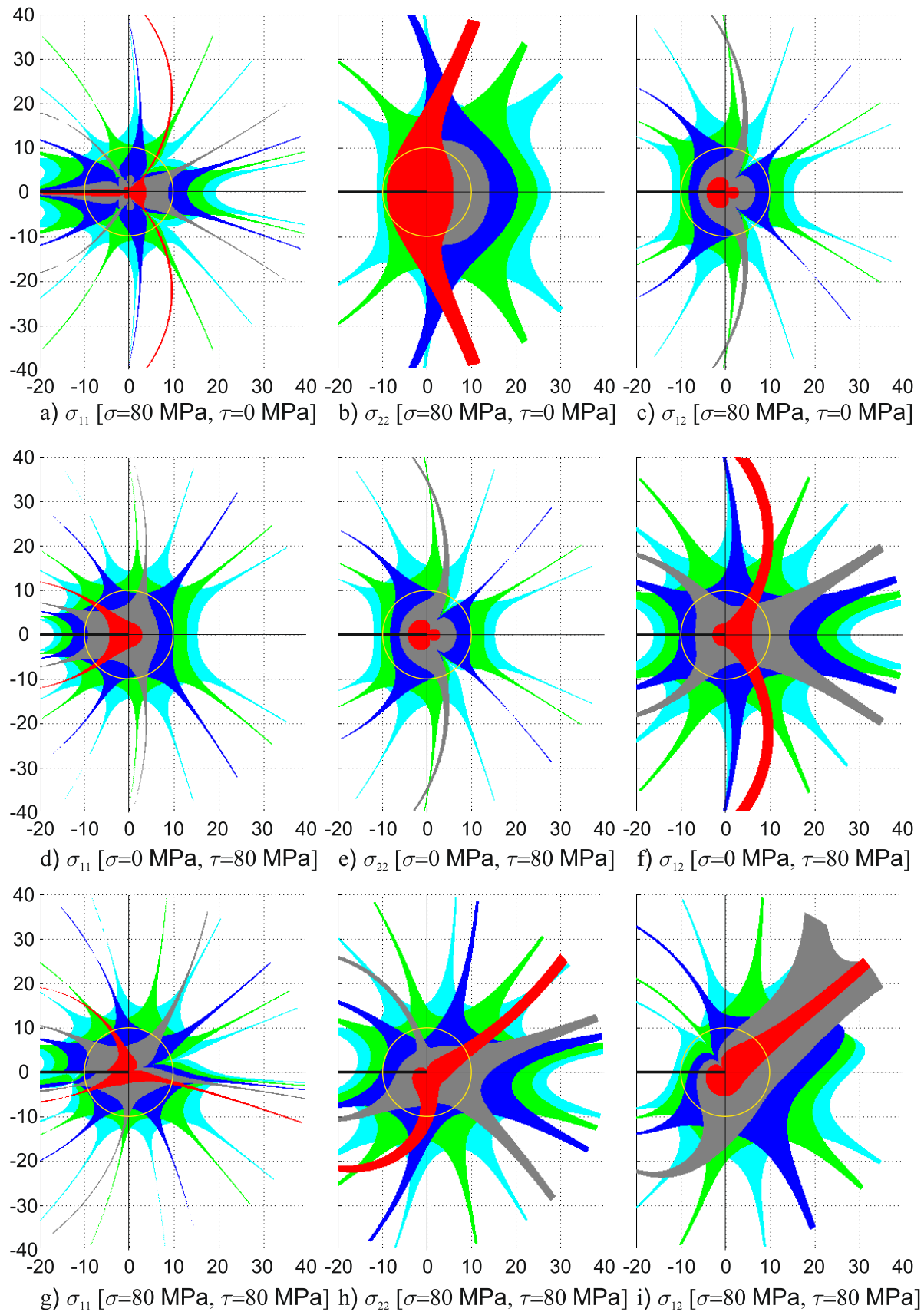


Bild 20: Bereich, in dem der Fehler für die durch die (endliche) WILLIAMSSche Reihe approximier- te analytische Lösung des GRIFFITH-Risses nicht größer als 1% ist, wobei die Farben [rot, grau, blau, grün, cyan] die Anzahl der genutzten Reihenterme [3, 5, 7, 9, 11] darstellen. Die dicke schwarze Linie repräsentiert den Riss. Der gelbe Kreis kennzeichnet den Bereich  $R = a/2$ .



Elektroden zu platzieren sind, so dass der Fehler infolge der endlichen Anzahl der Reihenterme bezogen auf die analytische Lösung nicht größer als 1% ist, ist im Bild 20 für die WILLIAMSSche Reihe mit 3, 5, 7, 9 und 11 Termen sowie drei Belastungszuständen dargestellt. Der Fehler ist definiert als:

$$Fehler = 1 - \frac{U_a}{U_w}, \quad (3.26)$$

wobei  $U_a$  das elektrische Signal nach der analytischen Formel und  $U_w$  das Signal nach der Approximation mit der WILLIAMSSchen Reihenentwicklung ist.

Es lässt sich erkennen, dass eine Approximation mit 7 Termen (blauer Bereich im Bild 20) im Bereich  $R = a/2$  um die Risspitze (heller Kreis im Bild 20) das 1%-Fehlerkriterium hinreichend gut erfüllt.

Weitere Diagramme zur Approximation durch die WILLIAMSSche Reihentwicklung sind im Anhang A.4 dargestellt.

### 3.6.2 Testrechnungen

Die Testrechnungen am GRIFFITH-Riss sind mit einer Risslänge von  $2a = 40$  mm festgelegt (vgl. Bild 19). Als Scheibenwerkstoff kommt die Aluminiumlegierung AW 7075 mit  $\nu^B=0,33$  und  $E^B = 72$  GPa zum Einsatz. Im Anhang A.2 wird gezeigt, dass die WILLIAMS-Koeffizienten  $(a_n, b_n)$  für  $n = 2m$  mit  $(m = 2, 3, \dots)$  null sind. Das bedeutet, dass für  $n = 7$  nur neun WILLIAMS-Koeffizienten und drei Unbekannte für die Lage der Risspitze zu bestimmen sind. Hierzu wären 12 Gleichungen bzw. Messelektroden notwendig. Aufgrund der Nichtlinearität des sich ergebenden Gleichungssystems existiert eine Lösungsmannigfaltigkeit. Zur Verringerung der Lösungsmannigfaltigkeit sollen vier zusätzliche Messwerte in die Auswertung einbezogen werden. Damit ergeben sich zur Auswertung 16 Messpositionen (Bild 20).

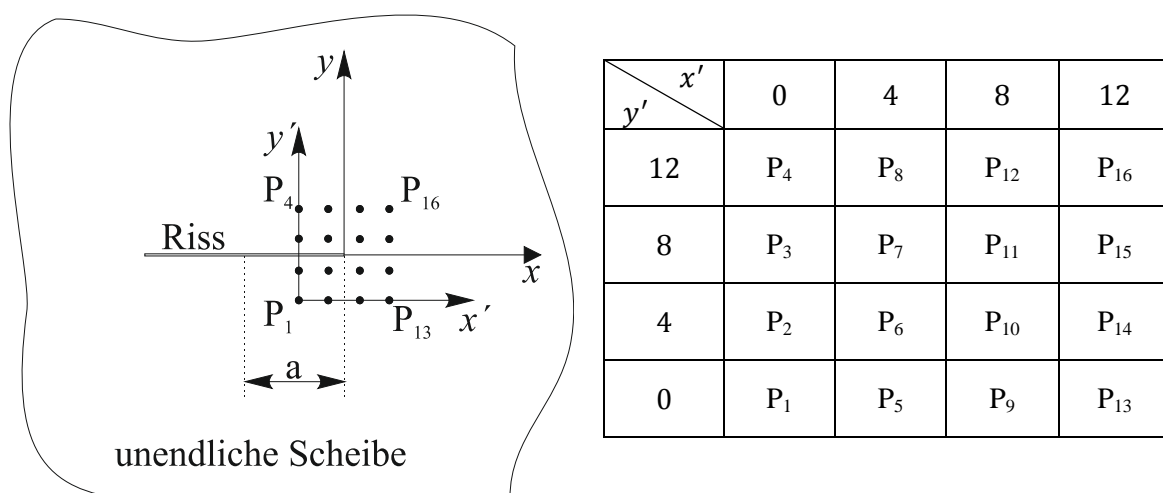


Bild 21: Riss in unendlicher Scheibe mit 16 Messstellen (Abmessungen in mm)

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt mit lokalen Optimierungsalgorithmen (s. Kapitel 3.2). Die Auswertungen der hypothetischen Messergebnisse mit dem LEVENBERG-

MARQUARDT Verfahren bzw. dem Principal-Axis Verfahren sind in den folgenden Tabellen gegenübergestellt. Hierbei stehen die Abkürzungen S, LM, bzw. PA für: den Startwert bei der Lösung der inversen Aufgabe, das LEVENBERG-MARQUARDT Verfahren bzw. das Principal-Axis Verfahren.

Für den GRIFFITH-Riss werden zwei verschiedene Lagen der Sensorfolie zum Riss (parallel und schräg) mit je drei Lastfällen ( $K_I, K_{II} = 0$ ), ( $K_I = 0, K_{II}$ ) und ( $K_I, K_{II}$ ) betrachtet. Die berechneten Werte  $U_{Aus}$ , die sich aus der analytischen Lösung für den GRIFFITH-Riss ergeben, dienen als Eingangsdaten für die Lösung des inversen Problems Gl. (3.22).

- A) Folien- und Rissspitzenkoordinatensystem sind parallel

In der Tabelle 15 sind drei Belastungssituationen und die sich daraus ergebenden Messsignale  $U_{Aus}$  in [mV] dargestellt ( $A = 0,25 \text{ mm}^2$ ,  $C_f = 0,1 \text{ nF}$ ).

Die Lösung der inversen Aufgabe nach Gl. (3.22) ist in den drei nachfolgenden Tabellen zusammengefasst.

Tabelle 15 – Elektrische Messsignale bei drei verschiedenen Belastungssituationen in [mV]

$\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 0 \text{ MPa}$				$\sigma = 0 \text{ MPa}, \tau = 80 \text{ MPa}$				$\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 80 \text{ MPa}$			
12,30	12,50	22,73	2,67	87,55	84,45	80,46	61,68	99,85	96,95	103,19	64,35
46,17	-10,57	-25,14	-36,32	159,98	223,07	136,30	42,22	206,16	212,50	111,16	5,90
46,17	-10,57	-25,14	-36,32	-159,98	-223,07	-136,30	-42,22	-113,81	-233,64	-161,44	-78,54
12,30	12,50	22,73	2,67	-87,55	-84,45	-80,46	-61,68	-75,25	-71,95	-57,74	-59,02

In allen drei Fällen wurden die  $K$ -Faktoren relativ genau bestimmt, wobei der Fehler deutlich unter einem Prozent liegt. Des Weiteren ist zu erkennen, dass die Startwerte für die Positionsunbekannten ( $x_0, y_0, \beta$ ) beim LEVENBERG-MARQUARDT Verfahren deutlich näher an der Lösung liegen müssen als beim Principal-Axis Verfahren.

Tabelle 16 – Lösung der inversen Aufgabe bei reiner Zugbeanspruchung ( $\beta = 0^\circ$ )

		$\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 0 \text{ MPa}$				
		Soll	S	LM	S	PA
$x_0$	[mm]	-6,00	-5,00	-5,99	-3,00	-5,99
$y_0$	[mm]	-6,00	-5,00	-6,00	-3,00	-6,00
$\beta$	[Grad]	0,00	2,00	0,00	3,00	0,00
$K_I$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	634,13	400,00	632,09	400,00	631,83
$K_{II}$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	0,00	50,00	0,00	50,00	0,00
$T$	[MPa]	-80,00	-50,00	-79,90	-50,00	-79,88
$a_3$	[MPa]	3,16	1,00	3,18	1,00	3,18
$b_3$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	-1,97	-1,00	-1,87	-1,00	-1,87
$b_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	2,47	1,00	2,58	1,00	2,61
$b_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabelle 17 – Lösung der inversen Aufgabe bei einfacher Scherbelastung ( $\beta = 0^\circ$ )

		$\sigma = 0 \text{ MPa}, \tau = 80 \text{ MPa}$				
		Soll	S	LM	S	PA
$x_0$	[mm]	-6,00	-5,00	-6,00	-3,00	-6,00
$y_0$	[mm]	-6,00	-5,00	-6,00	-3,00	-6,00
$\beta$	[Grad]	0,00	2,00	0,00	3,00	0,00
$K_I$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	0,00	50,00	0,00	50,00	0,00
$K_{II}$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	634,13	400,00	633,28	400,00	633,32
$T$	[MPa]	0,00	50,00	0,00	50,00	0,00
$a_3$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$b_3$	[MPa]	-3,16	-1,00	-3,14	-1,00	-3,14
$a_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$b_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	1,97	1,00	1,92	1,00	1,92
$a_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$b_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	-2,47	-1,00	-2,40	-1,00	-2,36

Tabelle 18 – Lösung der inversen Aufgabe bei Mixed-Mode-Belastung ( $\beta = 0^\circ$ )

		$\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 80 \text{ MPa}$				
		Soll	S	LM	S	PA
$x_0$	[mm]	-6,00	-5,00	-6,00	-3,00	-5,99
$y_0$	[mm]	-6,00	-5,00	-6,00	-3,00	-6,00
$\beta$	[Grad]	0,00	2,00	0,05	3,00	0,09
$K_I$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	634,13	400,00	630,41	400,00	630,09
$K_{II}$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	634,13	400,00	632,98	400,00	632,92
$T$	[MPa]	-80,00	-50,00	-79,86	-50,00	-79,85
$a_3$	[MPa]	3,16	1,00	3,20	1,00	3,12
$b_3$	[MPa]	-3,16	-1,00	-3,14	-1,00	-3,15
$a_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	-1,97	-1,00	-1,78	-1,00	-1,78
$b_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	1,97	1,00	1,92	1,00	1,93
$a_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	2,47	1,00	3,13	1,00	3,07
$b_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	-2,47	-1,00	-2,35	-1,00	-2,40

- B) Folien- und Rissspitzenkoordinatensystem sind nicht parallel

Wie unter A) sollen hier drei Belastungsfälle bei zum Riss schräg liegender Sensorfolie betrachtet werden. In der Tabelle 19 sind die entsprechenden elektrischen Signale in [mV] angegeben ( $A = 0,25 \text{ mm}^2, C_f = 0,1 \text{ nF}$ ).

Tabelle 19 - Elektrische Messsignale bei drei verschiedenen Belastungssituationen und schräger Folie ( $\beta = 15^\circ, -20^\circ, -10^\circ$ ) in [mV]

$\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 0 \text{ MPa}$				$\sigma = 0 \text{ MPa}, \tau = 80 \text{ MPa}$				$\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 80 \text{ MPa}$			
27,61	35,74	24,72	7,71	120,09	123,47	130,22	107,11	103,30	122,78	87,09	51,17
28,26	37,65	-5,31	-16,97	184,69	239,10	152,15	79,62	241,01	168,67	11,08	7,43
21,00	-219,85	-67,32	-39,24	-161,07	-163,18	-51,74	11,82	-152,45	-92,72	-60,64	-24,35
-28,64	-5,81	-26,80	-29,71	-60,61	-37,34	-22,38	-2,99	-34,69	-12,89	-18,46	-14,54

Die Lösung der inversen Aufgaben findet sich in den drei nachfolgenden Tabellen. Auch bei nicht paralleler Lage der Sensorfolie zum Riss werden sehr gute Ergebnisse erzielt.

Tabelle 20 – Lösung der inversen Aufgabe bei reiner Zugbeanspruchung ( $\beta = 15^\circ$ )

		$\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 0 \text{ MPa}$				
		Soll	S	LM	S	PA
$x_0$	[mm]	-2,00	-1,00	-2,07	-1,00	-2,05
$y_0$	[mm]	-5,00	-4,00	-4,96	-1,00	-4,96
$\beta$	[Grad]	15,00	10,00	14,06	10,00	14,35
$K_I$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	634,13	400,00	635,67	400,00	635,23
$K_{II}$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	0,00	50,00	6,00	50,00	4,11
$T$	[MPa]	-80,00	-50,00	-79,50	-50,00	-79,63
$a_3$	[MPa]	3,16	1,00	3,15	1,00	3,15
$b_3$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	-1,97	-1,00	-1,90	-1,00	-1,92
$b_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	2,47	1,00	1,95	1,00	1,97
$b_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabelle 21 – Lösung der inversen Aufgabe bei einfacher Scherbelastung ( $\beta = -20^\circ$ )

		$\sigma = 0 \text{ MPa}, \tau = 80 \text{ MPa}$				
		Soll	S	LM	S	PA
$x_0$	[mm]	-7,00	-6,00	-7,00	-1,00	-7,00
$y_0$	[mm]	-4,00	-3,00	-4,01	-1,00	-4,00
$\beta$	[Grad]	-20,00	-18,00	-19,94	-1,00	-19,97
$K_I$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	0,00	50,00	0,57	50,00	0,66
$K_{II}$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	634,13	400,00	633,80	400,00	633,89
$T$	[MPa]	0,00	50,00	-0,31	50,00	-0,24
$a_3$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$b_3$	[MPa]	-3,16	-1,00	-3,15	-1,00	-3,15
$a_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$b_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	1,97	1,00	1,91	1,00	1,92
$a_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$b_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	-2,47	-1,00	-2,10	-1,00	-2,13

Tabelle 22 – Lösung der inversen Aufgabe bei Mixed-Mode-Belastung ( $\beta = -10^\circ$ )

		$\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 80 \text{ MPa}$				
		Soll	S	LM	S	PA
$x_0$	[mm]	-4,00	-3,00	-3,99	-1,00	-3,99
$y_0$	[mm]	-6,00	-5,00	-6,00	-1,00	-6,00
$\beta$	[Grad]	-10,00	-6,00	-9,90	-1,00	-9,90
$K_I$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	634,13	400,00	635,78	400,00	635,47
$K_{II}$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	634,13	400,00	631,40	400,00	631,39
$T$	[MPa]	-80,00	-50,00	-80,64	-50,00	-80,56
$a_3$	[MPa]	3,16	1,00	3,16	1,00	3,16
$b_3$	[MPa]	-3,16	-1,00	-3,09	-1,00	-3,09
$a_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	-1,97	-1,00	-1,91	-1,00	-1,90
$b_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	1,97	1,00	1,74	1,00	1,75
$a_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	2,47	1,00	1,83	1,00	1,84
$b_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	-2,47	-1,00	-1,39	-1,00	-1,40

- C) Anwendung der TIKHONOV-Regularisierung

Eine wesentliche Voraussetzung für die Bestimmung der korrekten Lösung in A) und B) war die Wahl geeigneter Startwerte (S), was nicht immer gelingt. Um die Lösung robuster gegenüber den Startwerten zu machen, kann die TIKHONOV-Regularisierung [77] eingesetzt werden. Dabei wird das zu minimierende Funktional  $F(x)$  um eine zusätzliche Bedingung erweitert.

$$F(x) = \|U_{Aus} - f(x)\|^2 + \alpha_T \|x - x^*\|^2 \rightarrow \min, \alpha_T > 0, \quad (3.27)$$

wobei  $x^*$  die Startwerte repräsentiert. Der Faktor  $\alpha_T$  ist empirisch zu wählen.

Es soll das Beispiel A) erneut betrachtet werden (siehe Tabelle 23). Die Startwerte sind so vorgegeben, dass bei einfacher PA-Rechnung ein weitab von den Sollwerten liegendes Minimum berechnet wird. Eine PA-Rechnung mit integrierter TIKHONOV-Regularisierung (PA+TR) ( $\alpha_T = 10^{-5}$ ) liefert ein näher an den Sollwerten liegendes Minimum, allerdings noch nicht mit der gewünschten Genauigkeit. Die Vorgabe der (PA+TR)-Ergebnisse als Startwerte für eine erneute PA-Rechnung (PA<sub>neu</sub>) führt letztlich zu den Sollwerten. Dieses schrittweise Vorgehen scheint eine bessere Konvergenz in Richtung der korrekten Lösung zu versprechen. Die generelle Eignung ist noch zu testen.

Tabelle 23 – Lösung der inversen Aufgabe bei reiner Zugbeanspruchung ( $\beta \neq 15$ ) und geänderten Startwerten (vgl. Tabelle 20)

		$\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 80 \text{ MPa}$				
		Soll	S	PA	PA+TR	PA <sub>neu</sub>
$x_0$	[mm]	-2,00	-1,00	-3,98	-2,78	-2,05
$y_0$	[mm]	-5,00	-1,00	-4,04	-5,18	-4,96
$\beta$	[Grad]	15,00	3,00	0,63	17,26	14,35
$K_I$	[MPa√mm]	634,13	200,00	397,63	394,36	635,23
$K_{II}$	[MPa√mm]	0,00	10,00	39,10	10,00	4,11
$T$	[MPa]	-80,00	-20,00	-20,62	-44,82	-79,63
$a_3$	[MPa]	3,16	1,00	-8,52	18,50	3,15
$b_3$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	-1,97	-1,00	6,98	-1,00	-1,92
$b_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	2,47	1,00	8,31	1,00	1,97
$b_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

- D) Endliche Scheibe mit Kantenriss

Hier soll die Probe aus dem Kapitel 3.5.1 mit  $\nu^B = 0,3$  und  $E^B = 210 \text{ GPa}$  erneut betrachtet werden. In dem Kapitel 3.5.1 erbrachten die Testfälle bei vorhandenem  $K_{II}$  - Faktor keine ausreichend genauen Ergebnisse. Die Untersuchungen am GRIFFITH-Riss (A bis C) legen den Schluss nahe, dass die Messelektroden in dem Beispiel aus dem Kapitel 3.5.1 (Bild 17) in einem zu hohen Abstand zur Risspitze und untereinander platziert wurden. Aus diesem Grund werden jetzt die Elektroden (Bild 22) näher an die Risspitze und dichter zueinander platziert. Als Belastung wird abweichend zum Kapitel 3.5.1 eine einfache Scherbeanspruchung ( $F = 50 \text{ kN}$ ) gewählt.

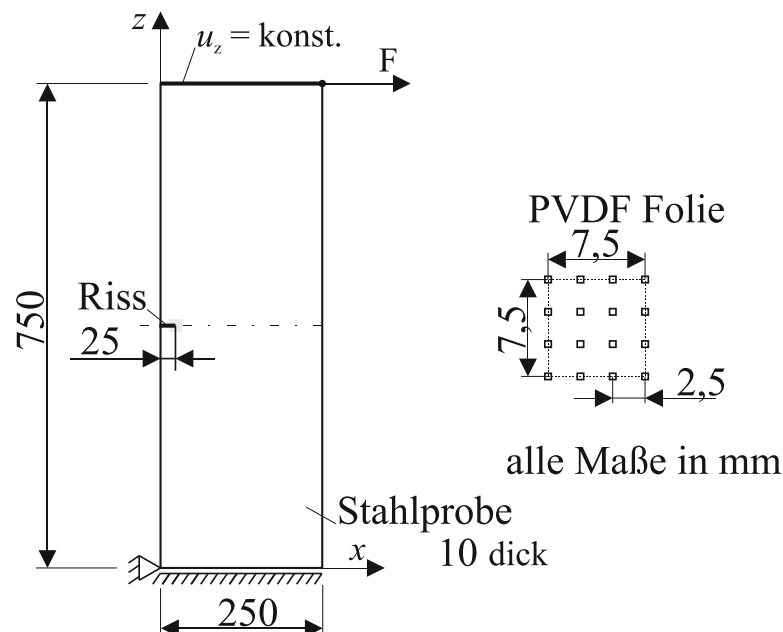


Bild 22: FEM-Probe mit Kantenriss

Die Ergebnisse der Rechnungen sind der Tabelle 24 zu entnehmen. Für die mit \* gekennzeichneten Felder sind keine Werte bekannt. Da  $K_I$  null ist, gilt außerdem  $a_n = 0$  mit  $n = 1 \dots 7$ .

Tabelle 24 – Lösung der inversen Aufgabe bei einfacher Schubbeanspruchung (FE-Modell)

		$K_I = 0 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}, K_{II} = 67 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}},$					
		Soll	S	LM	Soll	S	LM
$x_0$	[mm]	-3,75	-3,00	-3,64	-3,41	-3,00	-3,20
$y_0$	[mm]	-3,75	-3,00	-3,75	-4,06	-3,00	-4,19
$\beta$	[Grad]	0,00	8,00	0,00	5,00	0,00	5,04
$K_I$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$K_{II}$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	67,00	40,00	70,13	67,00	40,00	68,01
$T$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_3$	[MPa]	*	0,00	0,00	*	0,00	0,00
$b_3$	[MPa]	*	0,00	-3,14	*	0,00	-0,94
$a_4$	[MPa]	*	0,00	0,00	*	0,00	0,00
$b_4$	[MPa]	*	0,00	1,59	*	0,00	-0,03
$a_5$	[MPa]	*	0,00	0,00	*	0,00	0,00
$b_5$	[MPa]	*	0,00	-0,29	*	0,00	0,06
$a_6$	[MPa]	*	0,00	0,00	*	0,00	0,00
$b_6$	[MPa]	*	0,00	-0,07	*	0,00	-0,03
$a_7$	[MPa]	*	0,00	0,00	*	0,00	0,00
$b_7$	[MPa]	*	0,00	0,00	*	0,00	0,00

Im Gegensatz zum Beispiel in dem Kapitel 3.5.1 wird hier der  $K_{II}$  - Faktor mit sehr guter Genauigkeit bestimmt.

Die Erprobung des Konzeptes am GRIFFITH-Riss gab den Aufschluss bezüglich der Anordnung der Messelektroden im Hinblick auf den Konvergenzradius der WILLIAMS-Reihenentwicklung (speziell für das GRIFFITH-Riss Problem beträgt dieser  $2a$ , siehe Anhang A.2). Daher dürfen die Messelektroden nicht außerhalb des Konvergenzradius platziert werden. Wegen der praktisch begrenzten Anzahl von Reihentermen ist der Radius im Allgemeinen sogar noch kleiner zu wählen. Allgemein

zeigten die Testrechnungen am GRIFFITH-Riss die generelle Eignung der Messmethode. Damit ist eine potentielle Anwendung der Methode bei realen Bauteilen und Konstruktionen gegeben.

Die Schwierigkeit der geeigneten Wahl der Startwerte für das inverse Problem kann zum Beispiel zum Teil mit der Matrixmessmethode eliminiert werden. Näheres dazu wird im Kapitel 5 behandelt.

## 4 Sensorkonzept für die Biegung von Platten mit Riss

### 4.1 Rissnahfeldlösung nach der KIRCHHOFF-Plattentheorie

Erstmals von WILLIAMS [95] wurden die Eigenfunktionen um die Risspitze für schubstarre Platten berechnet. Allerdings liegen die nicht in der Form, wie man sie für das hier entwickelte Konzept braucht, vor. Aus diesem Grund soll ein ähnlicher Lösungsweg wie beim Scheibenproblem mit Hilfe komplexe Ansätze verfolgt werden.

An den lastfreien Rissflanken lassen sich drei Randbedingungen definieren:

$$m_{yy}(x, 0) = 0, \quad m_{xy}(x, 0) = 0, \quad q_y(x, 0) = 0. \quad (4.1)$$

Die Differentialgleichung vierter Ordnung (2.109) der schubstarrten Plattentheorie ermöglicht die Anwendung von nur zwei Randbedingungen. Daher ist es erforderlich, die beiden letzten Randbedingungen aus Gl. (4.1) in eine zu kombinieren, indem man eine Ersatzquerkraft  $q_y^*$  einführt:

$$q_y^* = q_y - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}, \quad q_y^*(x, 0) = 0. \quad (4.2)$$

Durch Einsetzen der Gl. (2.110) in die Gl. (2.107) und (2.108) erhält man die Randbedingungen (4.1) in komplexer Form:

$$\begin{aligned} m_{yy}|_{\pm\pi} &= \frac{1}{2} D \{ -2(1+\nu)[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] + (1-\nu)[\bar{z}\phi''(z) + \chi''(z) + z\overline{\phi''(z)} + \overline{\chi''(z)}] \} = 0, \\ q_y^*|_{\pm\pi} &= -\frac{1}{2} iD \{ (5-\nu)(\phi''(z) - \overline{\phi''(z)}) + (1-\nu)(\bar{z}\phi'''(z) + \chi'''(z) - z\overline{\phi'''(z)} - \overline{\chi'''(z)}) \} = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Auflösung der Gl. (4.3) mit den Funktionsansätzen Gl. (2.90) ergibt:

$$1 - e^{4i\pi\lambda_n} = 0, \quad (4.4)$$

woraus  $\lambda_n = \frac{n}{2}$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  folgt, um die unendliche Verschiebungen an der Risspitze auszuschließen.

Außerdem erhält man die Beziehung zwischen den komplexen Konstanten  $A_n$  und  $B_n$  aus der Gl. (2.90) zu:

$$B_n = -\frac{n}{n+2} A_n + (-1)^n \frac{2(\nu+3)}{(1-\nu)(2+n)} \bar{A}_n. \quad (4.5)$$

Schließlich lassen sich die Spannungen nach Gl. (2.106) durch das Einsetzen der Beziehung (4.5) unter Beachtung der Ansatzfunktionen (2.90) mit  $A_n = a_n + ib_n$ , wobei  $a_n$  den Rissmodus I und  $b_n$  den Modus II der Plattenbiegung repräsentieren, in die Durchbiegungsfunktion (2.110) bestimmen.



$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} (a_n M_{11}^{(n)} + b_n N_{11}^{(n)}) , \\
\sigma_{yy} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} (a_n M_{22}^{(n)} + b_n N_{22}^{(n)}) , \\
\sigma_{xy} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}-1} (a_n M_{12}^{(n)} + b_n N_{12}^{(n)}) , \\
M_{11}^{(n)} &= \frac{n}{2} \left\{ \left[ 2(1+\nu) - \frac{n}{2}(1-\nu) + (-1)^n(3+\nu) \right] \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi + (1-\nu)\left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\varphi \right\} , \\
N_{11}^{(n)} &= \frac{n}{2} \left\{ \left[ -2(1+\nu) + \frac{n}{2}(1-\nu) + (-1)^n(3+\nu) \right] \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi - (1-\nu)\left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\varphi \right\} , \\
M_{22}^{(n)} &= \frac{n}{2} \left\{ \left[ 2(1+\nu) + \frac{n}{2}(1-\nu) - (-1)^n(3+\nu) \right] \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi - (1-\nu)\left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\varphi \right\} , \\
N_{22}^{(n)} &= \frac{n}{2} \left\{ \left[ -2(1+\nu) - \frac{n}{2}(1-\nu) - (-1)^n(3+\nu) \right] \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi + (1-\nu)\left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\varphi \right\} , \\
M_{12}^{(n)} &= \frac{n}{2} \left\{ \left[ \frac{n}{2}(1-\nu) - (-1)^n(3+\nu) \right] \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi - (1-\nu)\left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\varphi \right\} , \\
N_{12}^{(n)} &= \frac{n}{2} \left\{ \left[ \frac{n}{2}(1-\nu) + (-1)^n(3+\nu) \right] \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\varphi - (1-\nu)\left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\varphi \right\} .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Mit  $n = 1$  kann der erste Term der Rissnahfeldlösung (4.6) abgeleitet werden:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{(1)} \\ \sigma_{yy}^{(1)} \\ \sigma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} = -\frac{1-\nu}{2h(3+\nu)} \frac{k_1 z}{\sqrt{2}r} \begin{pmatrix} 3 \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{5\varphi}{2} \\ -\frac{11+5\nu}{1-\nu} \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{5\varphi}{2} \\ \frac{7+\nu}{1-\nu} \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{5\varphi}{2} \end{pmatrix} + \frac{1-\nu}{2h(3+\nu)} \frac{k_2 z}{\sqrt{2}r} \begin{pmatrix} \sin \frac{5\varphi}{2} - \frac{9+7\nu}{1-\nu} \sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{5\varphi}{2} \\ \frac{5+3\nu}{1-\nu} \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{5\varphi}{2} \end{pmatrix} , \tag{4.7}$$

wobei  $k_1 = -\frac{Eh(3+\nu)}{\sqrt{2}(1-\nu^2)} a_1$  und  $k_2 = -\frac{Eh(3+\nu)}{\sqrt{2}(1-\nu^2)} b_1$  sind.

Eine Besonderheit stellt auch die zweite Eigenfunktion ( $n = 2$ ) dar. Im Fall der reinen Plattenbiegung ( $k_1, k_2 = 0$ ) erhält man eine konstante Spannung parallel zum Rissufer  $B_K(z)$  (vgl.  $T$ -Spannung beim Scheibenproblem):

$$\sigma_{xx}^{(2)} = B_K(z) = -4 \frac{Ez}{1-\nu} a_2 , \quad \sigma_{yy}^{(2)} = 0 , \quad \sigma_{xy}^{(2)} = 0 , \tag{4.8}$$

die reine Torsion der Platte liefert dagegen eine konstante Schubspannung:

$$\sigma_{xx}^{(2)} = 0 , \quad \sigma_{yy}^{(2)} = 0 , \quad \sigma_{xy}^{(2)} = -4 \frac{Ez}{1-\nu^2} b_2 . \tag{4.9}$$

Die qualitative Auswertung der Spannungsintensitätsfaktoren nach der KIRCHHOFFschen Platten-theorie ( $k_1, k_2$ ) kann durch deren Umrechnung in die Spannungsintensitätsfaktoren aus der Schei-bentheorie ( $K_I, K_{II}$ ) erfolgen. In der Arbeit von HUI und ZEHNDER [96] wurde ein Zusammenhang zwischen den KIRCHHOFFschen und REISSNERSchen Spannungsintensitätsfaktoren ( $K_1, K_2$ ) herge-stellt:

$$\frac{K_1}{k_1} = \sqrt{\frac{1+\nu}{3+\nu}} , \quad \frac{K_2}{k_2} = \sqrt{\frac{1+\nu}{3+\nu}} , \quad \text{für } K_3 = 0 . \tag{4.10}$$

Die REISSNERSchen Spannungsintensitätsfaktoren sind wiederum mit den „normalen“  $K$ -Faktoren verknüpft (siehe Kapitel A.5, Gl. (A.86)), woraus schließlich folgt:

$$k_1 = \frac{K_I}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{3+v}{1+v}}, \quad k_2 = \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{3+v}{1+v}}, \quad \text{für } K_3 = 0. \quad (4.11)$$

## 4.2 Sensorkonzept für die schubstarre Plattentheorie (KIRCHHOFF)

Im Kapitel 3 wurde ein in dieser Arbeit hergeleitetes Sensorkonzept auf die Scheibenprobleme angewandt. Um das Konzept auf die Plattenprobleme nach der KIRCHHOFFschen Plattentheorie anwenden zu können, müssen die Spannungen nach Gl. (4.6) in die Gl. (3.19) eingesetzt werden. Somit erhält man einen Zusammenhang zwischen den Spannungsintensitätsfaktoren der Platte ( $k_1, k_2$ ) und den gemessenen elektrischen Signalen  $U_i$ .

Die Erprobung des Sensorkonzeptes erfolgt am Beispiel einer unendlichen Platte mit einem Riss (Bild 49). Es wird nur der Fall der allseitigen Biegung der Platte betrachtet, da der Fall der allseitigen Torsion der Platte das gleiche Vorgehen vorsieht. Mit Hilfe der bekannten Lösung einer allseitig gebogenen Platte Gl. (2.115) werden die hypothetisch gemessenen elektrische Signale bestimmt. Aus den auf diese Weise bestimmten Signalen werden mit Hilfe der Reihenentwicklung der Spannungen Gl. (4.6) die dazugehörige Spannungsintensitätsfaktoren und die Rissposition berechnet.

Im Anhang A.3 ist gezeigt, dass der Geltungsbereich der Reihenentwicklung für die unendliche Platte ebenso wie für den GRIFFITH-Riss auf den Radius  $2a$  begrenzt ist. Für die Auswertung der elektrischen Signale kann nur eine begrenzte Anzahl der Reihenterme berücksichtigt werden. Die dafür benötigten Koeffizienten ( $a_n, b_n$ ) werden nach im Anhang A.3 hergeleiteten Formeln Gl. (A.16) bestimmt. Die Kenntnis über die benötigte Anzahl der Reihenterme für dieses Plattenproblem kann über die Fehleranalyse der Approximation der analytischen Lösung durch die Reihenterme gewonnen werden.

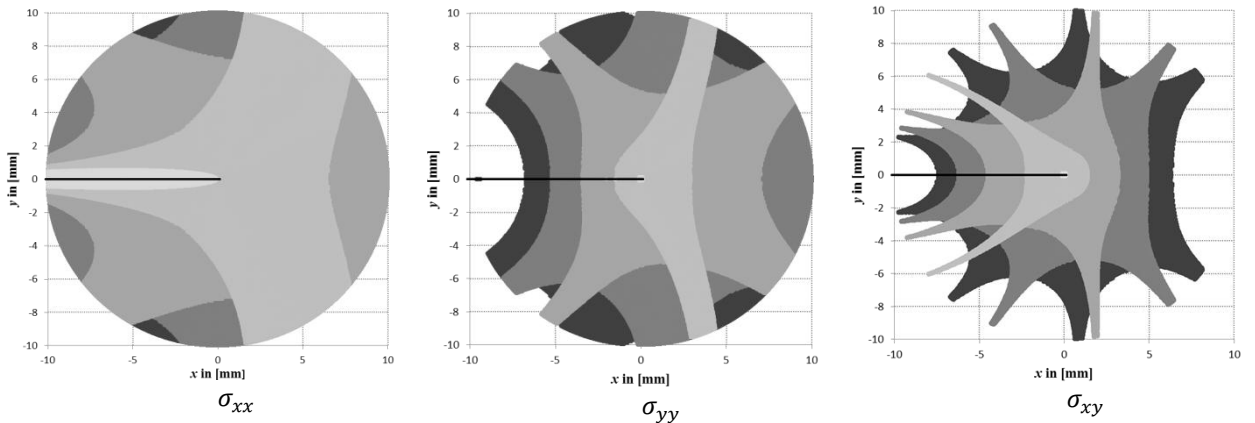


Bild 23: Bereich, in dem der Fehler für die durch die (endliche) Reihenentwicklung approximierte analytische Lösung nicht größer als 1% ist, wobei die Farben a) [■, ■, ■, ■, ■], b) und c) [■, ■, ■, ■, ■] die Anzahl der genutzten Reihenterme a) [2, 3, 5, 7, 9], b) und c) [1, 3, 5, 7, 9] darstellen. Die dicke schwarze Linie repräsentiert den Riss.

Zu bemerken ist, dass die berechnete Spannung  $\sigma_{xx}$  nach der analytischen Lösung im Gegensatz zur  $\sigma_{yy}$  in der Nähe der Risspitze ( $r = 0,01$  mm,  $\varphi = 0^\circ$ ) nicht ausreichend genug durch den ersten Term der Reihenentwicklung ( $n = 1$ ) approximiert wird (Tabelle 25,  $E^B = 72$  GPa,

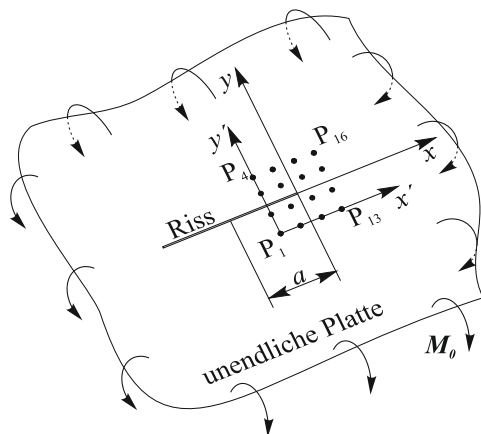
$\nu^B = 0,33$ ,  $h = 1$  mm,  $a = 10$  mm,  $M_0 = 5/3$  N,  $H_0 = 0$  N). Erst in Verbindung mit dem zweiten Term kann eine hinreichend genaue Approximation erreicht werden.

Auf dem Bild 23 sind Gültigkeitsbereiche der Lösungsapproximation in einem Radius von  $a = 10$  mm um die Risspitze durch die Reihenterme mit  $n = 1, 2, 3, 5, 7, 9$  in denen der Approximationsfehler nicht größer als 1% ist, dargestellt. Es wird ersichtlich, dass eine Approximation mit sieben Termen im Bereich  $R = a/2$  um die Risspitze der 1%-Fehlerbedingung genügt.

Tabelle 25 – Spannungsvergleich (approximierte / analytische Lösung)

	approxim. Lösung (Gl. (4.6)) mit			analyt. Lösung
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	Gl. (2.115)
$\sigma_{xx}$ in N/mm <sup>2</sup>	-44,9899563	-32,9779443	-33,0116868	-33,0116797
$\sigma_{yy}$ in N/mm <sup>2</sup>	223,6067978	223,6067978	223,7745029	223,7744679
$\sigma_{xy}$ in N/mm <sup>2</sup>	0,0	0,0	0,0	0,0

Für die Testrechnung an einer unendlichen Platte ist die Risslänge von  $2a = 20$  mm festgelegt. Wie auch für die Scheibenprobleme (vgl. 3.6.2) wird die Aluminiumlegierung AW 7075 mit  $\nu^B=0,33$  und  $E^B = 72$  GPa als Plattenwerkstoff verwendet. Die Herleitung der WILLIAMS-Koeffizienten ( $a_n, b_n$ ) im Anhang A.3 zeigt, dass diese für  $n = 2m$  mit ( $m = 2, 3, \dots$ ) null sind. Demzufolge müssen für  $n = 7$  nur fünf Koeffizienten ( $k_2 = 0$ , reine Biegung) und drei Unbekannte für die Lage der Risspitze bestimmt werden. Somit sind acht Gleichungen bzw. Messelektroden notwendig. Aufgrund der Nichtlinearität des zu lösenden Gleichungssystems und der Existenz einer Lösungsmannigfaltigkeit müssen mehr Gleichungen bzw. Messpunkte in die Auswertung einbezogen werden. Aus Gründen der Symmetrie sollen 16 Messpositionen (Bild 24) aufgenommen werden.



lokale Position der Messpunkte in [mm]

$y' \backslash x'$	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	10
10	P <sub>4</sub>	P <sub>8</sub>	P <sub>12</sub>	P <sub>16</sub>
$\frac{20}{3}$	P <sub>3</sub>	P <sub>7</sub>	P <sub>11</sub>	P <sub>15</sub>
$\frac{10}{3}$	P <sub>2</sub>	P <sub>6</sub>	P <sub>10</sub>	P <sub>14</sub>
0	P <sub>1</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>9</sub>	P <sub>13</sub>

Bild 24: Unendliche Platte mit einem Riss unter allseitiger Biegung mit 16 Messelektroden

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems ist mit zwei lokalen Optimierungsalgorithmen (s. Kapitel 3.2, LEVENBERG-MARQUARDT und Principal-Axis Verfahren) erfolgt. Die Auswertungen der hypothetischen Messergebnisse sind in den Tabellen gegenübergestellt, wobei die Abkürzungen S den Startwert bei der Lösung der inversen Aufgabe, LM das LEVENBERG-MARQUARDT Verfahren und PA das Principal-Axis Verfahren darstellen.

Für die Testrechnung werden zwei verschiedene Lagen der Sensorfolie zum Riss (parallel versetzt  $\beta = 0^\circ$  und schräg  $\beta = 10^\circ$ ) mit einem Lastfall ( $k_1, k_2 = 0$ ) betrachtet. Die berechneten Werte

$U_{Aus}$ , die sich aus der analytischen Lösung für die unendliche Platte mit einem Riss unter allseitiger Biegung ergeben, dienen als Eingangsdaten für die Lösung des inversen Problems (Gl. (3.19) mit Gl. (4.6)).

In der Regel sind die Koeffizienten  $a_n$ ,  $b_n$  sehr klein, daher ist es sinnvoll, wenigstens für den zweiten konstanten Term der Reihenentwicklung (Gl. (4.8)) für  $z = h/2$  Folgendes einzuführen:

$$\sigma_{xx}^{(2)} = -\frac{2Eh}{(1-\nu)}a_2 = B_K. \quad (4.12)$$

- A) Folien- und Rissspitzenkoordinatensystem sind parallel versetzt

In der Tabelle 26 sind die berechneten elektrischen Messsignale  $U_{Aus}$  in [mV] unter vorgegebener Last dargestellt ( $A = 0,25 \text{ mm}^2$ ,  $C_f = 0,1 \text{ nF}$ )

Tabelle 26 – Hypothetische elektrische Messsignale (Bild 24)

$M_0 = 5/3 \text{ N}, H_0 = 0 \text{ N}$			
-11,347	-11,578	-11,431	-11,157
-11,573	-11,592	-10,809	-10,742
-12,824	-10,357	-10,022	-10,537
-11,421	-11,631	-11,193	-10,929

Die Lösung der inversen Aufgabe nach Gl. (3.19) in Verbindung mit Gl. (4.6) ist in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst.

Tabelle 27 – Lösung der inversen Aufgabe bei reiner Biegebeanspruchung ( $\beta = 0^\circ$ )

		$M_0 = 5/3 \text{ N}, H_0 = 0 \text{ N}$				
		Soll	S	LM	S	PA
$x_0$	[mm]	-3,00	-1,00	-3,00	-6,00	-3,00
$y_0$	[mm]	-4,00	-1,00	-4,00	-6,00	-4,00
$\beta$	[Grad]	0,00	5,00	0,01	3,00	0,01
$k_1$	[MPa√mm]	31,62	10,00	31,53	10,00	31,53
$k_2$	[MPa√mm]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$B_K$	[MPa]	12	0,00	11,99	7,00	11,99
$a_3 \cdot 10^{-6}$	[MPa]	-4,155	0,00	-4,09	-1,00	-4,09
$b_3 \cdot 10^{-6}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_5 \cdot 10^{-8}$	[MPa]	5,194	0,00	4,63	1,00	4,63
$b_5 \cdot 10^{-8}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_7 \cdot 10^{-9}$	[MPa]	-1,299	0,00	-0,79	-1,00	-0,79
$b_7 \cdot 10^{-9}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Aus der Tabelle 27 wird ersichtlich, dass die berechnete Rissspitzenposition sehr genau berechnet wurde und der bestimmte  $k_1$  Faktor sehr gut mit dem Soll-Wert übereinstimmt.

- B) Folien- und Rissspitzenkoordinatensystem sind schräg zu einander

In der Tabelle 28 sind unter vorgegebener Belastungssituation sich daraus ergebenden Messsignale  $U_{Aus}$  in [mV] zusammengefasst ( $A = 0,25 \text{ mm}^2$ ,  $C_f = 0,1 \text{ nF}$ ).

Tabelle 28 – Hypothetische elektrische Messsignale bei schräger Lage der Folie

$M_0 = 5/3 \text{ N}, H_0 = 0 \text{ N}$			
-10,624	-10,468	-10,859	-10,816
-11,115	-7,851	-9,763	-10,402
-12,855	-13,201	-11,170	-10,740
-11,858	-12,277	-11,989	-11,380

In der Tabelle 29 sind die Ergebnisse der Lösung der inversen Aufgabe nach Gl. (3.19) in Verbindung mit Gl. (4.6) dargestellt.

Tabelle 29 – Lösung der inversen Aufgabe bei reiner Biegebeanspruchung ( $\beta = 10^\circ$ )

		$M_0 = 5/3 \text{ N}, H_0 = 0 \text{ N}$				
		Soll	S	LM	S	PA
$x_0$	[mm]	-3,00	-6,00	-2,99	-6,00	-2,99
$y_0$	[mm]	-6,00	-3,00	-6,00	-4,00	-6,00
$\beta$	[Grad]	10,00	5,00	9,85	5,00	9,85
$k_1$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	31,62	15,00	31,73	5,00	31,73
$k_2$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$B_k$	[MPa]	12	6,00	12,00	8,00	12,00
$a_3 \cdot 10^{-6}$	[MPa]	-4,155	0,00	-4,08	-1,00	-4,08
$b_3 \cdot 10^{-6}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_5 \cdot 10^{-8}$	[MPa]	5,194	0,00	4,92	1,00	4,92
$b_5 \cdot 10^{-8}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_7 \cdot 10^{-9}$	[MPa]	-1,299	0,00	-1,01	-1,00	-1,01
$b_7 \cdot 10^{-9}$	[MPa]	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Ebenso wie bei der parallelen Sensorlage zum Riss lassen sich die gesuchten Werte sehr gut bestimmen. Der Fehler des bestimmten  $k_1$  Faktors liegt deutlich unter einem Prozent. Bei der Lösung von Plattenproblemen bietet der LEVENBERG-MARQUARDT Algorithmus mehr Freiheit bei der Wahl von Startwerten, insbesondere bezüglich sehr kleiner Werte von  $a_3$ ,  $a_5$  und  $a_7$ , im Gegensatz zum Principal-Axis Verfahren, wo mindestens das Vorzeichen und die Größenordnung des gesuchten Wertes vorgegeben werden müssen.

- C) endliche Platte mit Kantenriss

Mit Hilfe der FEM soll ein Viertel des Plattenmodells mit Riss unter allseitiger Biegung mit  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $h = 1 \text{ mm}$ ,  $\nu^B = 0,33$  und  $E^B = 72 \text{ GPa}$  mit 3D Elementen (C3D20R) simuliert werden. Die zehnfachen Abmessungen der Platte im Vergleich zur Risslänge erlauben einen Vergleich des Modells mit der analytischen Lösung, vor allem die Auswertung des Spannungsintensitätsfaktors  $k_1$ . Die Untersuchungen zeigen, dass die Messelektroden bei der Benutzung der KIRCHHOFFschen Plattentheorie einerseits nicht zu weit und andererseits nicht zu nah an der Risspitze platziert werden sollen. Aus diesem Grund werden die Elektroden in einem bestimmten Bereich um die Risspitze (Bild 25) angeordnet. Da nur ein Viertel des Modells verwendet wird, wird nur die Hälfte der notwendigen Messpunkte simuliert ( $P_3, P_4, P_7, P_8, P_{11}, P_{12}, P_{15}, P_{16}$ ). Aufgrund einer symmetrischen Belastung der Platte gilt für elektrische Signale an den Messpunkten  $P_1 = P_4$ ,  $P_2 = P_3$ ,  $P_5 = P_8$ ,  $P_6 = P_7$ ,  $P_9 = P_{12}$ ,  $P_{10} = P_{11}$ ,  $P_{13} = P_{16}$  und  $P_{14} = P_{15}$ .

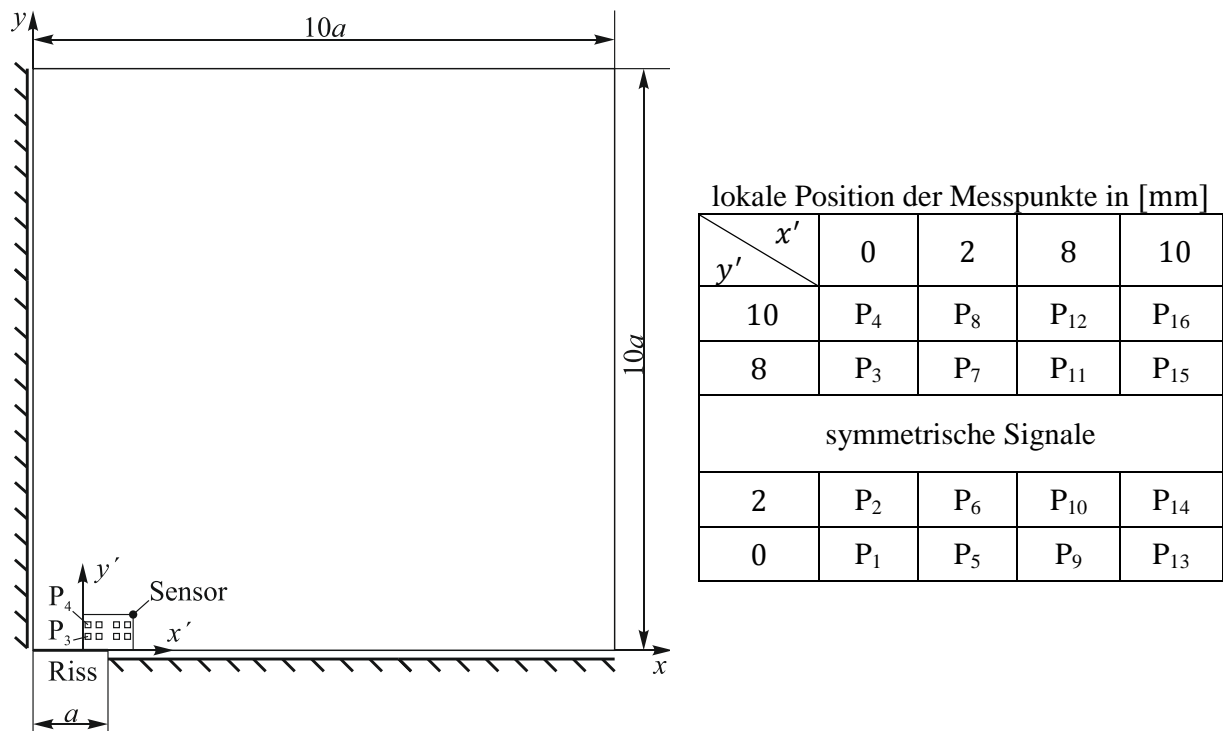
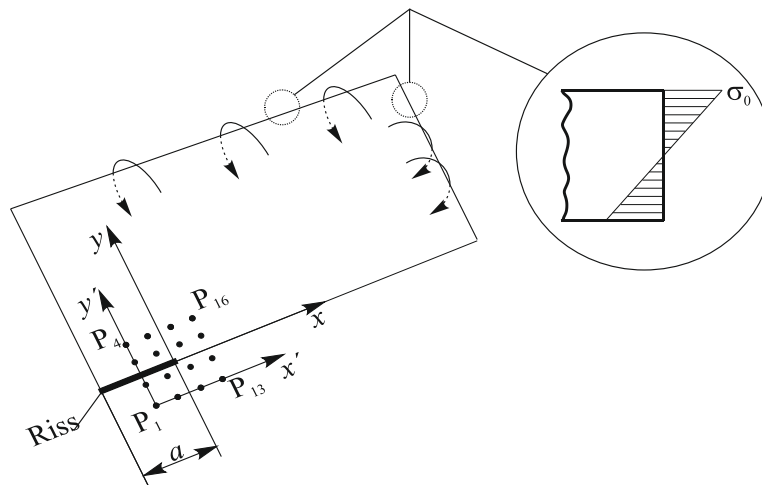


Bild 25: 1/4 des Plattenmodells simuliert in FEM

Das Plattenmodell ist an den äußeren Rändern mit  $\sigma_0 = 10 \text{ N/mm}^2$  belastet (Bild 26), woraus  $M_0 = \frac{\sigma_0 h^2}{6} = \frac{5}{3} \text{ N}$  folgt.

Bild 26: 1/4 des Plattenmodell allseitig gebogen mit  $M_0$ 

Die berechneten elektrischen Signale aus der FEM Rechnung mit  $A = 0,25 \text{ mm}^2$  und  $C_f = 0,1 \text{ nF}$  sind in der Tabelle 30 dargestellt.

Tabelle 30 – Elektrische Signale aus der FEM Rechnung in [mV]

$M_0 = 5/3 \text{ N}, H_0 = 0 \text{ N}$			
-12,171	-12,048	-12,114	-11,844
-12,721	-12,279	-11,662	-11,401
-12,721	-12,279	-11,662	-11,401
-12,171	-12,048	-12,114	-11,844

Die Ergebnisse der Rechnungen sind der Tabelle 31 zu entnehmen. Es wurden zwei Rechnungen unter Berücksichtigung von 7 und 9 Termen der Reihenentwicklung durchgeführt. Der mit FEM berechnete  $K$ -Faktor beträgt  $K_I = 36,62 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$  mit EVZ an der Rissspitze, woraus unter der Annahme des ESZ  $K_I = 34,6 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$  ist. Nach Gl. (4.11) folgt somit der Soll-Wert  $k_1 = 30,89 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ . Zum Vergleich beträgt die analytischen Lösung für dieses Plattenproblem nach der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie  $k_1 = 31,62 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ . Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt mit dem LEVENBERG-MARQUARDT Optimierungsalgorithmus.

Tabelle 31 – Ergebnisse der Rechnung anhand der FEM berechneten Signale (\* - die Werte liegen nicht vor)

		Soll	S	LM ( $n = 7$ )	LM ( $n = 9$ )
$x_0$	[mm]	-5,00	-2,50	-4,99	-4,94
$y_0$	[mm]	-5,00	-2,50	-5,00	-5,00
$\beta$	[Grad]	0,00	5,00	0,00	0,00
$k_1$	$[\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}]$	30,89	15,00	34,39	32,23
$k_2$	$[\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}]$	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_2 \cdot 10^{-5}$	[MPa]	*	0,00	-6,016	-5,988
$a_3 \cdot 10^{-6}$	[MPa]	*	0,00	-5,365	-5,589
$a_5 \cdot 10^{-8}$	[MPa]	*	0,00	4,798	3,582
$a_7 \cdot 10^{-9}$	[MPa]	*	0,00	-1,844	-2,168
$a_9 \cdot 10^{-11}$	[MPa]	*	0,00		-5,123

Wie man aus der Tabelle 31 entnehmen kann, wird die Rissspitzenposition bei sieben Termen sehr genau bestimmt. Dagegen weicht der  $k_1$ -Faktor von dem „Soll“-Wert um ca. 10% und der analytischen Lösung (KIRCHHOFFSche Plattentheorie) um ca. 8,7% ab. Im Fall von neun berücksichtigten Termen liegt die Abweichung des  $k_1$ -Faktors vom „Soll“-Wert bei ca. 4% und nach analytischer Lösung (KIRCHHOFFSche Plattentheorie) bei ca. 1,9%.

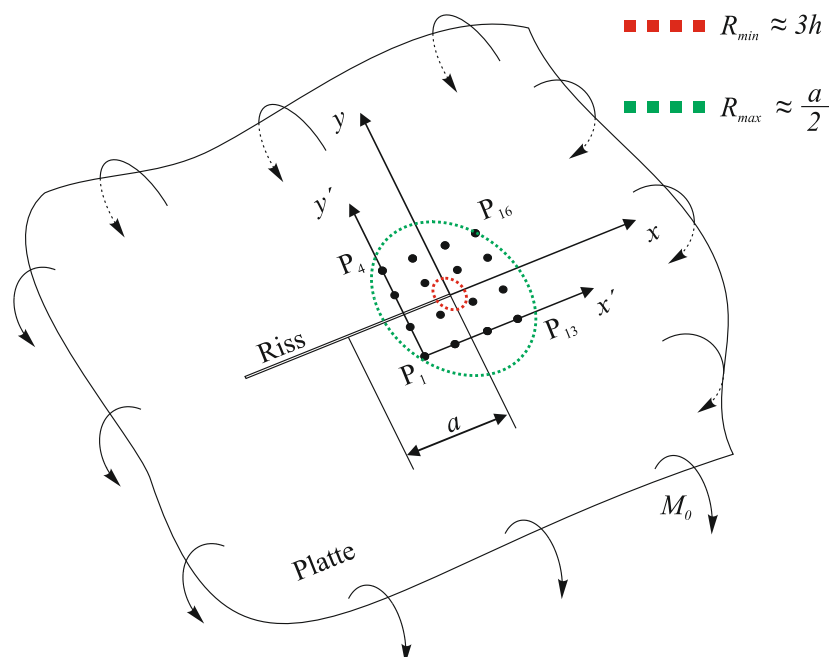


Bild 27: Allseitig gebogene Platte mit dem Platzierungsbereich für Elektroden vor der Rissspitze

Die Verwendung der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie in dem Sensorkonzept ist nur unter Einschränkungen möglich. Einerseits dürfen die Messelektroden um die Risspitze, wegen der Annahmen der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie, erst ab ca.  $3h$  platziert werden. Andererseits ist aufgrund des Konvergenzradius der Entwicklungsreihe der Applikationsbereich der Messelektroden auf ca.  $a/2$  beschränkt (Bild 27). Unter anderem bedarf es der Umrechnung nach Gl. (4.11) der berechneten KIRCHHOFFSchen Spannungsintensitätsfaktoren ( $k_1, k_2$ ) in die bekannten Spannungsintensitätsfaktoren aus der Scheibentheorie ( $K_I, K_{II}$ ).

Somit kann das Sensorkonzept nach der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie effektiv zur Bestimmung der Risspitze benutzt werden. Die Spannungsintensitätsfaktoren nach der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie lassen sich in der Bruchmechanik nur schwer zur praktischen Bewertung von Rissen anwenden, weil für diese Kenngrößen keine entsprechenden kritischen Materialkennwerte (Bruchzähigkeit) vorliegen und bisher auch keine Bruchkriterien formuliert wurden. Der Grund dafür ist, dass die Spannungsintensitätsfaktoren nach der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie idealisierte Kenngrößen sind und nicht den lokalen Spannungszustand an der Rissfront über die Plattendicke wiedergeben.

Um diese Schwierigkeit zu überwinden, soll das Sensorkonzept für schubweiche Platten angewandt werden.

### 4.3 Sensorkonzept für die schubelastische Plattentheorie (MINDLIN)

Für das Sensorkonzept nach der MINDLINSchen Plattentheorie müssen die Spannungen Gl. (2.122) in Eigenfunktionen entwickelt werden, um in die Gl. (3.19) eingesetzt werden zu können. Dadurch kann ein Zusammenhang zwischen den Spannungsintensitätsfaktoren der Plattentheorie nach MINDLIN ( $K_1, K_2$ ) und den gemessenen elektrischen Signalen  $U_i$  hergestellt werden.

In der Literatur [97,98] findet man, dass der Spannungszustand an der Risspitze unter Biegung nach der REISSNERSchen Plattentheorie dem der Scheibenprobleme unter Zug (Gl. (2.63)) entspricht. Die Bestimmung der Eigenfunktionen des Rissproblems und eine Übersicht über die früheren Arbeiten auf diesem Gebiet ist in [99] zu finden. Allerdings können die hergeleiteten Eigenfunktionen keine genügende Anwendung für dieses Sensorkonzept finden, da sie nicht in der Form wie für das Scheibenproblem Gl. (2.96) vorliegen. In der angegebenen Lösung werden drei unbekannte Koeffizienten (vgl. [99]: Modus I  $\rightarrow a_n^{(1)}$ , Modus II  $\rightarrow a_n^{(2)}$ , Modus III  $\rightarrow a_n^{(3)}$ ) definiert. Bei der Herleitung der Lösung werden die Drehwinkel und die Durchbiegung Gl. (2.120) in Form der doppelten unendlichen Reihe mit drei unbekannten Koeffizienten  $(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, a_n^{(3)})$  angesetzt. Ebenso geben die Autoren in der Arbeit an, dass die Lösung in einem Radius  $r < h/10$  von der Risspitze konvergiert. Dieser Radius wird auch in der anderen Arbeit [96] angegeben. Zu bemerken ist noch eine weitere Arbeit [100] zur Entwicklung der Eigenfunktionen nach der MINDLINSchen Plattentheorie. Hier wird der gleiche Lösungsweg wie in [99] verwendet. Die Definition der Schnittmomente und der Querkräfte in [100] gleicht der in [99], obwohl es für verschiedene Plattentheorien angegeben wird. In [72] wird gezeigt, dass die Drehwinkel und die Durchbiegung in beiden Theorien nicht identisch sind, trotz des eingeführten Schubkorrekturfaktors in der MINDLINSchen Plattentheorie.



In dieser Arbeit erfolgt die Herleitung der Eigenfunktionen der Spannungen für die Plattenprobleme auf einem anderen Weg als in [99,100]. Der Lösungsweg ähnelt dem des Rissproblems für Scheiben (vgl. Kapitel 2.3.5). Dazu werden für die beiden Differentialgleichungen Gl. (A.21) und (A.22) passende komplexe Ansätze gewählt und das Randwertproblem Gl. (A.40) entsprechend gelöst. Im Kapitel A.5 ist der Herleitungsweg ausreichend dargestellt. Somit ergeben sich die Spannungen durch Einsetzen der Gl. (A.60) bis (A.62) in die Gl. (2.122) zu:

$$\sigma_{rr} = -\frac{3(1-\nu)z}{2h^3} D \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-1} \sum_{k=0}^{l_n} f_k^{\lambda_n-2k-1} \left\{ a_{\lambda_n-2k-1} \left( F_{rr}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} R_{rr}^{(n)} \right) + b_{\lambda_n-2k-1} \left( G_{rr}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} S_{rr}^{(n)} \right) \right\}, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} F_{rr}^{(n)} &= (\lambda_n(1-\nu) + 1 + 3\nu) \cos \varphi(\lambda_n - 1) + (2 - \lambda_n(1-\nu) + (-1)^n(1+\nu)) \cos \varphi(\lambda_n + 1), \\ G_{rr}^{(n)} &= -(\lambda_n(1-\nu) + 1 + 3\nu) \sin \varphi(\lambda_n - 1) - (2 - \lambda_n(1-\nu) - (-1)^n(1+\nu)) \sin \varphi(\lambda_n + 1), \\ R_{rr}^{(n)} &= ((k - 2\lambda_n - (-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n + 1)) \cos \varphi(\lambda_n + 1) - \lambda_n(\lambda_n - 2k - 1) \cos \varphi(\lambda_n - 2k - 1), \\ S_{rr}^{(n)} &= -((k - 2\lambda_n + (-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n + 1)) \sin \varphi(\lambda_n + 1) + \lambda_n(\lambda_n - 2k - 1) \sin \varphi(\lambda_n - 2k - 1), \end{aligned}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{3(1-\nu)z}{2h^3} D \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-1} \sum_{k=0}^{l_n} f_k^{\lambda_n-2k-1} \left\{ a_{\lambda_n-2k-1} \left( F_{\varphi\varphi}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} R_{\varphi\varphi}^{(n)} \right) + b_{\lambda_n-2k-1} \left( G_{\varphi\varphi}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} S_{\varphi\varphi}^{(n)} \right) \right\}, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} F_{\varphi\varphi}^{(n)} &= -(\lambda_n(1-\nu) - 3 - \nu) \cos \varphi(\lambda_n - 1) - (2 - \lambda_n(1-\nu) + (-1)^n(1+\nu)) \cos \varphi(\lambda_n + 1), \\ G_{\varphi\varphi}^{(n)} &= (\lambda_n(1-\nu) - 3 - \nu) \sin \varphi(\lambda_n - 1) + (2 - \lambda_n(1-\nu) - (-1)^n(1+\nu)) \sin \varphi(\lambda_n + 1), \\ R_{\varphi\varphi}^{(n)} &= -((k - 2\lambda_n - (-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n + 1)) \cos \varphi(\lambda_n + 1) + \lambda_n(\lambda_n - 2k - 1) \cos \varphi(\lambda_n - 2k - 1), \\ S_{\varphi\varphi}^{(n)} &= ((k - 2\lambda_n + (-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n + 1)) \sin \varphi(\lambda_n + 1) - \lambda_n(\lambda_n - 2k - 1) \sin \varphi(\lambda_n - 2k - 1), \end{aligned}$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{3(1-\nu)z}{2h^3} D \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-1} \sum_{k=0}^{l_n} f_k^{\lambda_n-2k-1} \left\{ a_{\lambda_n-2k-1} \left( F_{r\varphi}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} R_{r\varphi}^{(n)} \right) + b_{\lambda_n-2k-1} \left( G_{r\varphi}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} S_{r\varphi}^{(n)} \right) \right\}, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} F_{r\varphi}^{(n)} &= -(1-\nu)(\lambda_n - 1) \sin \varphi(\lambda_n - 1) - (2 - \lambda_n(1-\nu) + (-1)^n(1+\nu)) \sin \varphi(\lambda_n + 1), \\ G_{r\varphi}^{(n)} &= -(1-\nu)(\lambda_n - 1) \cos \varphi(\lambda_n - 1) - (2 - \lambda_n(1-\nu) - (-1)^n(1+\nu)) \cos \varphi(\lambda_n + 1), \\ R_{r\varphi}^{(n)} &= -((k - 2\lambda_n - (-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n + 1)) \sin \varphi(\lambda_n + 1) \\ &\quad + (\lambda_n(\lambda_n - 1) + 2k(k - \lambda_n + 1)) \sin \varphi(\lambda_n - 2k - 1), \\ S_{r\varphi}^{(n)} &= -((k - 2\lambda_n + (-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n + 1)) \cos \varphi(\lambda_n + 1) \\ &\quad + (\lambda_n(\lambda_n - 1) + 2k(k - \lambda_n + 1)) \cos \varphi(\lambda_n - 2k - 1). \end{aligned}$$

Der erste und der zweite Term ( $n = 1, 2$ ) der Reihenentwicklung nach Gl. (4.13) bis (4.15) ergibt sich zu:

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -\frac{Ez}{8\sqrt{2}} \sqrt{\frac{h}{\pi\sqrt{10}}} r^{-\frac{1}{2}} \left( a_{-\frac{1}{2}} \left( 5 \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{3\varphi}{2} \right) + b_{-\frac{1}{2}} \left( 5 \sin \frac{\varphi}{2} - 3 \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \right), \quad (4.16)$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} = -\frac{Ez}{2} a_0 \cos^2 \varphi,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{Ez}{8\sqrt{2}} \sqrt{\frac{h}{\pi\sqrt{10}}} r^{-\frac{1}{2}} \left( a_{-\frac{1}{2}} \left( 3 \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} \right) + b_{-\frac{1}{2}} \left( 3 \sin \frac{\varphi}{2} + 3 \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \right), \quad (4.17)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{Ez}{2} a_0 \sin^2 \varphi,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\varphi}^{(1)} &= -\frac{Ez}{8\sqrt{2}}\sqrt{\frac{h}{\pi\sqrt{10}}}r^{-\frac{1}{2}}\left(a_{-\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{3\varphi}{2}\right)-b_{-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+3\cos\frac{3\varphi}{2}\right)\right), \\ \sigma_{r\varphi}^{(2)} &= \frac{Ez}{4}a_0\sin 2\varphi.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Bemerkenswert ist, dass die Winkelfunktionen der Lösung mit denjenigen des Scheibenproblems identisch sind.

Nach IRWIN [101] sind die Momentintensitätsfaktoren  $(K_1^{(m)}, K_2^{(m)})$  wie folgt definiert:

$$K_1^{(m)} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} m_{\varphi\varphi}(r, 0), \quad K_2^{(m)} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} m_{r\varphi}(r, 0). \quad (4.19)$$

Die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_1(z), K_2(z)$  der schubweichen Platte sind über folgende Beziehungen mit den Momentintensitätsfaktoren verknüpft:

$$K_1(z) = \frac{12z}{h^3} K_1^{(m)}, \quad K_2(z) = \frac{12z}{h^3} K_2^{(m)}. \quad (4.20)$$

Somit ergeben sich die Spannungsintensitätsfaktoren der Platte unter Berücksichtigung der Gl. (A.71) und (A.72) zu:

$$K_1(z) = -\frac{Ez}{2}\sqrt{\frac{h}{\pi\sqrt{10}}}a_{-\frac{1}{2}}, \quad K_2(z) = \frac{Ez}{2}\sqrt{\frac{h}{\pi\sqrt{10}}}b_{-\frac{1}{2}}. \quad (4.21)$$

So wie bei der Scheibenlösung die  $T$ -Spannung (vgl. Gl. (2.99)) und in der Plattentheorie nach KIRCHHOFF (vgl.  $B_K$  Gl. (4.8)), beschreibt die zweite Eigenfunktion auch einen konstanten Spannungszustand  $B_R(z)$  parallel zum Rissufer nach der MINDLIN-Plattentheorie. Transformiert man die zweite Eigenfunktion der Spannungen (Gl. (4.16) bis (4.18)) in das kartesische Koordinatensystem, so folgt:

$$\sigma_{xx}^{(2)} = B_R(z) = -\frac{Ez}{2}a_0, \quad \sigma_{yy}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{xy}^{(2)} = 0. \quad (4.22)$$

An der Oberfläche der Platte mit  $z = h/2$  erhält man somit:

$$K_1 = -\frac{Eh}{4}\sqrt{\frac{h}{\pi\sqrt{10}}}a_{-\frac{1}{2}}, \quad K_2 = \frac{Eh}{4}\sqrt{\frac{h}{\pi\sqrt{10}}}b_{-\frac{1}{2}}, \quad B_R = -\frac{Eh}{4}a_0. \quad (4.23)$$

Der Konvergenzradius der Reihenentwicklung (Gl. (4.13) bis (4.15)) lässt sich nicht ohne die analytische Lösung für das Plattenproblem bestimmen. In der Literatur findet man geschätzte Angaben von  $r < h/10$ . Das soll am Beispiel von  $\sigma_{rr}$  (Gl. (4.13)) untersucht werden. Die Gl. (4.13) soll nach Koeffizienten  $(a_{\lambda_n-1}, b_{\lambda_n-1})$  sortiert werden und man erhält mit  $z = h/2$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{3(1-\nu)}{4h^2}D \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sum_{k=0}^{s_n} r^{\lambda_n+2k-1} f_k^{\lambda_n-1} \left\{ a_{\lambda_n-1} \left( F_{rr}^{(n)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{(\lambda_n+k)(k+1)} R_{rr}^{(n)} \right) + b_{\lambda_n-1} \left( G_{rr}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n+k)(k+1)} S_{rr}^{(n)} \right) \right\}, \\ F_{rr}^{(n)} &= ((\lambda_n+2k)(1-\nu) + 1 + 3\nu) \cos \varphi(\lambda_n+2k-1) \\ &\quad + (2 - (\lambda_n+2k)(1-\nu) + (-1)^n(1+\nu)) \cos \varphi(\lambda_n+2k+1),\end{aligned}\quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
G_{rr}^{(n)} &= -((\lambda_n + 2k)(1 - \nu) + 1 + 3\nu) \sin \varphi (\lambda_n + 2k - 1) \\
&\quad - (2 - (\lambda_n + 2k)(1 - \nu) - (-1)^n(1 + \nu)) \sin \varphi (\lambda_n + 2k + 1) , \\
R_{rr}^{(n)} &= ((k - 2(\lambda_n + 2k) - (-1)^n k)(k + 1) + (\lambda_n + 2k)(\lambda_n + 2k + 1)) \cos \varphi (\lambda_n + 2k + 1) \\
&\quad - (\lambda_n + 2k)(\lambda_n - 1) \cos \varphi (\lambda_n - 1) , \\
S_{rr}^{(n)} &= -((k - 2(\lambda_n + 2k) + (-1)^n k)(k + 1) + (\lambda_n + 2k)(\lambda_n + 2k + 1)) \sin \varphi (\lambda_n + 2k + 1) \\
&\quad + (\lambda_n + 2k)(\lambda_n - 1) \sin \varphi (\lambda_n - 1) ,
\end{aligned}$$

wobei  $s_n = \left\lfloor \frac{n_{max} - n}{4} \right\rfloor$  ist. Mit der Einführung von:

$$\begin{aligned}
\xi_n^a(r, \varphi) &= - \sum_{k=0}^{s_n} \frac{3(1 - \nu)}{4h^2} D \left( F_{rr}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n + k)(k + 1)} R_{rr}^{(n)} \right) f_k^{\lambda_n - 1} r^{\lambda_n + 2k - 1} , \\
\xi_n^b(r, \varphi) &= - \sum_{k=0}^{s_n} \frac{3(1 - \nu)}{4h^2} D \left( G_{rr}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n + k)(k + 1)} S_{rr}^{(n)} \right) f_k^{\lambda_n - 1} r^{\lambda_n + 2k - 1} ,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$\sigma_{rr} = \sum_{n=1}^{n_{max}} \{ a_{\lambda_n - 1} \xi_n^a(r, \varphi) + b_{\lambda_n - 1} \xi_n^b(r, \varphi) \} . \tag{4.26}$$

Schaut man sich zum Beispiel die Funktion  $\xi_1^a(r, \varphi)$  für  $n = 1$  (Bild 28 mit  $n_{max} = 20$ ,  $h = 1$  mm,  $\nu = 0,33$ ,  $E = 72$  GPa) an, stellt man fest, dass die Funktion  $\xi_1^a$  ab einem bestimmten  $r$  exponentiell wächst oder fällt. Daraus lässt sich eine konkrete Aussage über einen festen Wert von  $r \leq R$  nicht machen, allerdings kann man aus dem Bild 28 den Wert  $r \leq h/10$  annehmen.

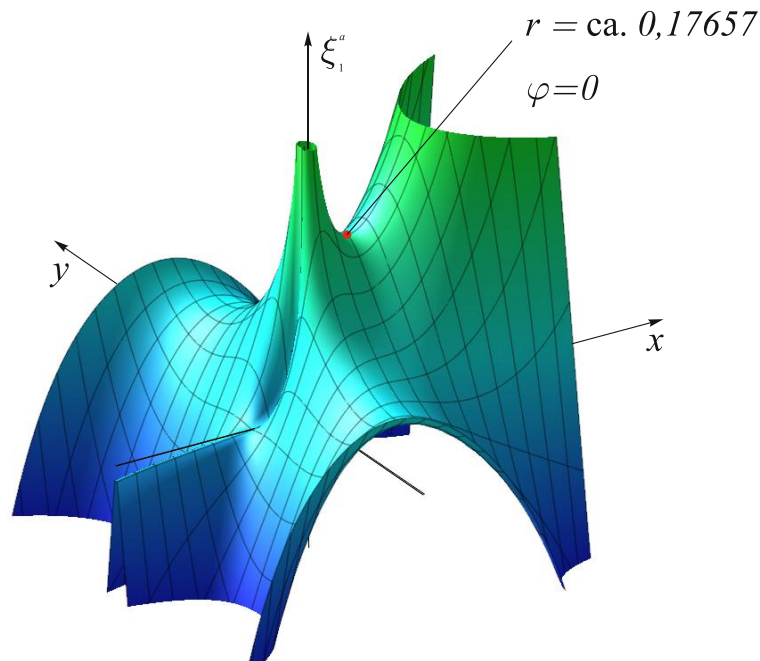


Bild 28: Verlauf der Funktion  $\xi_1^a(r, \varphi)$  im Bereich  $r = 0..0,8$ ,  $\varphi = -\pi.. \pi$

Infolge des kleinen Konvergenzradius der hergeleiteten Lösung (Gl. (4.13) bis (4.15)) kann dieser Zugang somit in der Praxis nur schwer für das Sensorkonzept eingesetzt werden. Um das Sensorkonzept auf technische relevante Plattenstrukturen anwenden zu können ( $h \approx 1 \dots 5$  mm), müssen die Elektroden innerhalb  $R \approx 0,1 \dots 0,5$  mm platziert werden. Das Konzept wäre machbar, wenn hinreichend kleine Sensoren nach anderem Funktionsprinzip zukünftig bereitstehen.

## 5 Matrixmessmethode

Im Weiteren soll eine Methode zur Erweiterung der Messauflösung vorgestellt werden. Die Ausführungsform des Sensors wurde aus dem Konzept der Berührungssensoren übernommen [102,103,104]. Die Vorteile dieser Methode liegen sofort auf der Hand. Zum Ersten erhöht sich deutlich die Anzahl der zur Verfügung stehenden Messpunkte. Zum Zweiten kann die Rissspitzenposition bei ausreichend feiner Auflösung „graphisch“ bzw. anhand geometrischer Daten bestimmt werden. Die Schwierigkeiten bei der vorliegenden Methode liegen in der Auswertung der Messwerte und der technischer Umsetzung. Zuerst soll ein einfaches Beispiel mit vier Messpunkten untersucht werden, anhand dessen die Regeln für eine beliebige Anzahl der Messpunkte erstellt werden sollen. Der Übergang von der Messmatrix zum Kondensatormodell ermöglicht die Erstellung des analytischen Modells zum Auslesen der Messsignale. Im Kapitel 5.1 werden zuerst allgemeine Beziehungen zu der Verteilung der Ladung im Kondensatormodell hergeleitet. Im Kapitel 5.2 werden die Zusammenhänge zur Ladungsmessung nach der Matrixmessmethode bei Piezoelektrika erklärt. Die Notwendigkeit der Herleitung der entsprechenden Beziehungen soll am folgenden Beispiel verdeutlicht werden. An einer piezoelektrischen Folie mit einer (2,2)-Messmatrix werden die elektrischen Ladungen nacheinander ausgelesen. An den Kreuzungspunkten ( $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$ ) von Leiterbahnen (Bild 29) ist eine Flächenlast mit jeweils (100; 200; 300; 400) N/mm<sup>2</sup> vorgegeben.

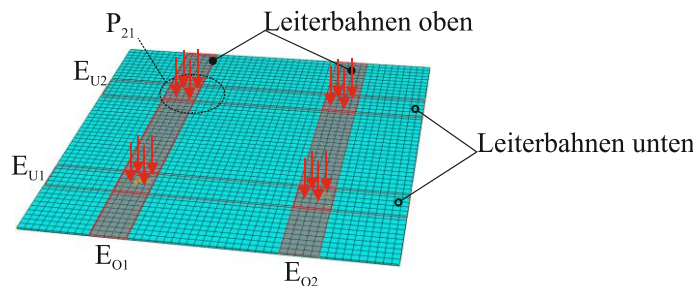


Bild 29: Ausleseverfahren der Ladung an einer piezoelektrischen Folie mittels FEM

Im ersten Schritt werden die untere  $E_{U1}$ - und obere  $E_{O1}$ -Elektrode kurzgeschlossen bzw. das Potential beider Elektroden auf null gesetzt (Bild 30a). Die mittels FEM berechnete Ladung  $-Q_{G11}$  an der oberen Elektrode dient als Randbedingung im zweiten Schritt bei der Messung an dem Kreuzungspunkt  $P_{12}$  (Bild 30b).

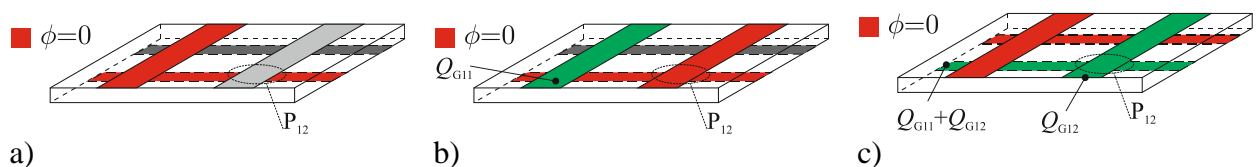


Bild 30: Auslesereihenfolge der Ladung an einer (2,2)-Messmatrix

Die bestimmte Ladung  $-Q_{G12}$  an der Elektrode  $E_{O2}$  und  $E_{U1}$  (vgl. Bild 29) soll als Randbedingung in den dritten Schritt eingehen, wobei die Ladung an der Elektrode  $E_{U1}$  die Summe ( $Q_{G11} + Q_{G12}$ ) der generierten Ladungen im ersten und zweiten Schritt ist. Die im dritten Schritt berechnete Ladungen an der oberen Elektrode  $E_{O1}$  mit  $-(Q_{G11} + Q_{G21})$  und  $Q_{G21}$  an der unteren Elektrode  $E_{U2}$

formulieren die Randbedingung für den vierten Schritt. Im vierten Schritt ergeben sich die Ladungen an der  $E_{O2}$  zu  $-(Q_{G12} + Q_{G22})$  und an  $E_{U2}$  zu  $(Q_{G21} + Q_{G22})$ .

Als Referenzlösung dienen die mit FEM berechneten Ladungen mit getrennten Elektroden (Bild 31). Auf diese Weise können vorerst die elektrischen Streufelder zwischen den Leiterbahnen in der Rechnung vernachlässigt werden.

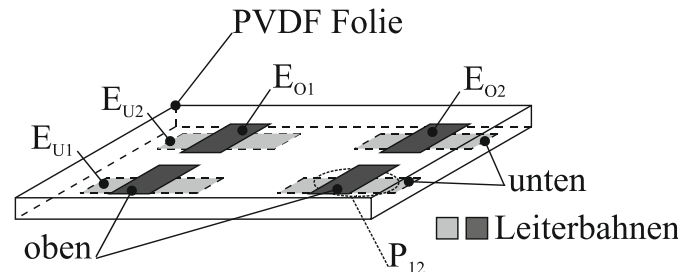


Bild 31: Referenzlösung mit getrennten Elektroden

In der Tabelle 32 sind Messergebnisse beider FEM Rechnungen zusammengefasst.

Tabelle 32 – Gemessene Ladung an einem Sensor mit vier Messpunkten

Messpunkt ij	Last in [N/mm <sup>2</sup> ]	Gemessen (FEM) $Q_{Gij}$ in [nC]	Referenzladung (FEM) $Q_{ij}$ in [nC]
11	100	0,589417	0,441534
12	200	0,981543	0,883067
21	300	1,89692	1,3246
22	400	1,59173	1,76614

Aus der Tabelle 32 ist ersichtlich, dass die gemessenen Werte nach der Matrixmessmethode sich deutlich von der Referenzlösung unterscheiden. In den nachfolgenden Kapiteln werden diese Zusammenhänge ausgearbeitet.

## 5.1 Verteilung der Ladung in der Folie (Kondensatormodell)

### 5.1.1 (2,2)-Messmatrix

Auf dem Bild 32 ist ein Beispiel der (2,2)-Messmatrix abgebildet. Die vier Messpunkte  $P_{ij}$  werden durch zwei oben ( $E_{O1}, E_{O2}$ ) und rechtwinklig dazu zwei unten ( $E_{U1}, E_{U2}$ ) geführten Leiterbahnen gebildet.

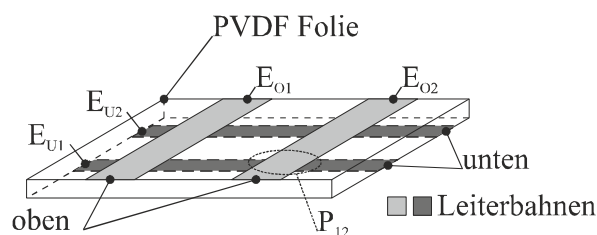


Bild 32: (2,2)-Messmatrix gebildet durch die Kreuzung der Leiterbahnen auf einer PVDF Folie

Der theoretische Hintergrund zur Verteilung der Ladung im Modell kann mit Hilfe der Kondensatoren beschrieben werden. Jeder Messpunkt repräsentiert somit einen Kondensator (Bild 33), der mit den anderen Kondensatoren agiert.

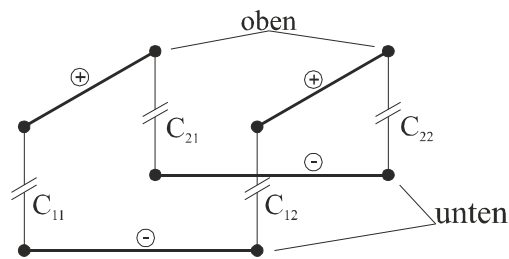


Bild 33: (2,2)-Messmatrix in Kondensator-Darstellung. + und – Zeichen kennzeichnen die unteren  $E_{Uj}$  und oberen  $E_{Oj}$ -Leiterbahnen

Die Aufladung eines Kondensators bewirkt, dass das Potential an den Leiterbahnen sich auf einen bestimmten Wert einstellt und somit verteilt sich die aufgebrachte Ladung auf die gesamte Zusammenschaltung. Am deutlichsten wird das, wenn man von dem Bild 33 zu einer alternativen Darstellung der Zusammenschaltung (Bild 34) übergeht.

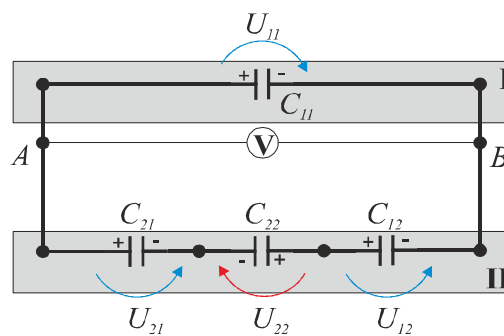


Bild 34: Elektrotechnische Zeichnung der (2,2) Matrixmessmethode. (+) und (–) Zeichen kennzeichnen Anschlüsse an die oberen und unteren Leiterbahnen

Die mechanische Belastung der piezoelektrischen Folie an dem Messpunkt entspricht dem Aufladen eines Kondensators mit einer Ladung  $Q^0$ . Da die Folie mehrere Messpunkte besitzt, verteilen sich generierte Ladungen im ganzen System. Beim Übergang zum Kondensatormodell liegen am Anfang einzelne mit  $(Q_{11}^0, Q_{12}^0, Q_{21}^0, Q_{22}^0)$  geladene Kondensatoren (Bild 35) vor. Alle Kondensatoren besitzen die gleiche Kapazität  $C$ .

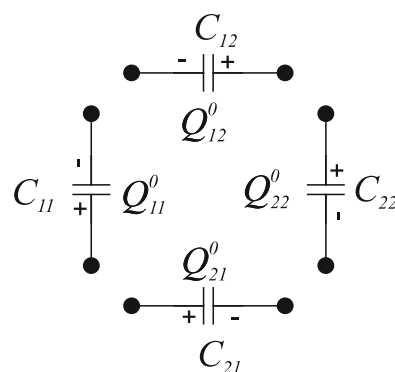


Bild 35: Getrennte Kondensatoren mit Anfangsladungen

Durch den Zusammenschluss aller Kondensatoren entsprechend dem Bild 34 verteilen sich die Ladungen in der gesamten Schaltung. Diesen Prozess kann man auch mit dem Aufladen der Kondensatorschaltung (Bild 34) parallel zu jedem einzelnen Kondensator (z. B. an der Stelle AB) gleichsetzen. Mit der bekannten Beziehung  $Q = CU$  ergibt sich durch das Aufladen mit  $Q_{11}^0$  an der Stelle AB folgender Zusammenhang:

$$U_{AB} = U_{11} = U_{II}, \quad \frac{Q_{11}}{C} = \frac{3(Q_{11}^0 - Q_{11})}{C}, \quad (5.1)$$

wobei  $Q_{11}$  mit  $Q_{11} = \frac{3}{4}Q_{11}^0$  die Ladung ist, die am Kondensator  $C_{11}$  nach dem Aufladeprozess verbleibt. Durch das Aufladen an drei weiteren Stellen mit  $(Q_{12}^0, Q_{21}^0, Q_{22}^0)$  berechnet sich die Gesamtladung am  $C_{11}$  unter Beachtung der Parallelschaltung der Kondensatorgruppe II, die in sich in Reihe geschaltete Kondensatoren sind, zu:

$$Q_{11} = \frac{3}{4}Q_{11}^0 + \frac{1}{4}Q_{12}^0 + \frac{1}{4}Q_{21}^0 - \frac{1}{4}Q_{22}^0. \quad (5.2)$$

Die gleiche Berechnungsvorschrift gilt auch für die anderen Kondensatoren, somit ergibt sich in Matrixform folgende Beziehung:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{21} \\ Q_{22} \end{bmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}^0 \\ Q_{12}^0 \\ Q_{21}^0 \\ Q_{22}^0 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Auf der Basis des Beispiels der (2,2)-Messmatrix lässt sich eine allgemeine Vorschrift für eine  $(M, N)$ -Messmatrix mit  $(M, N \geq 2)$  herleiten.

### 5.1.2 $(M, N)$ -Messmatrix

Angenommen, es liegt eine Messmatrix mit M Zeilen und N Spalten vor (Bild 36).

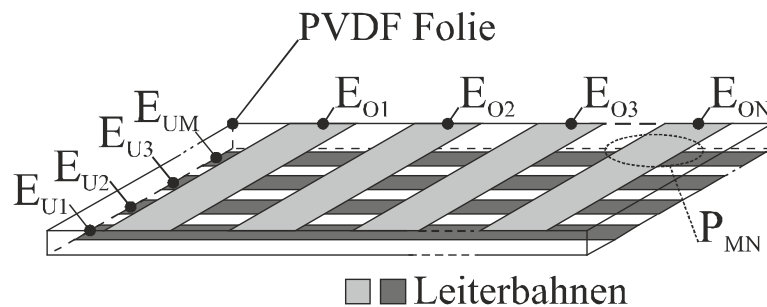


Bild 36:  $(M, N)$ -Messmatrix auf einer PVDF-Folie

Wie auch im Beispiel mit einer (2,2)-Messmatrix soll die piezoelektrische Folie und die sich darauf befindlichen Leiterbahnen durch ein Kondensatormodell ersetzt werden (Bild 37).

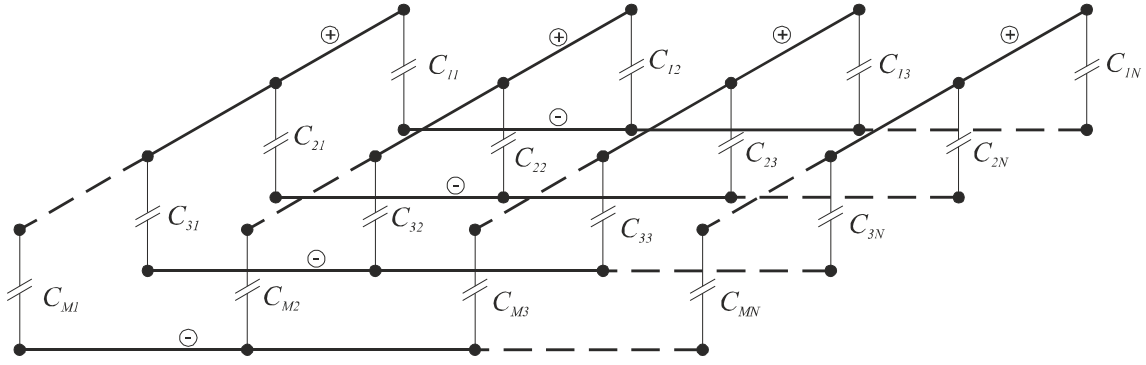


Bild 37: Kondensatormodell der  $(M, N)$ -Messmatrix. (+) und (-) Zeichen kennzeichnen die obere und untere Elektrode

Im Gegensatz zur  $(2,2)$ -Messmatrix lässt sich die elektrische Zeichnung zum Bild 37 schwer in 2D Darstellung übersichtlich darstellen. Daher ist es sinnvoll, die Zeichnung so zu gestalten, dass die Kondensatoren anschaulich in Gruppen eingeteilt sind (Bild 38). Im Bereich III sind Messpunkte erfasst, die horizontal und im Bereich V die vertikal zum Messpunkt  $C_{11}$  angeordnet sind. Schließlich sind im Bereich IV die restlichen Messpunkte eingegliedert.

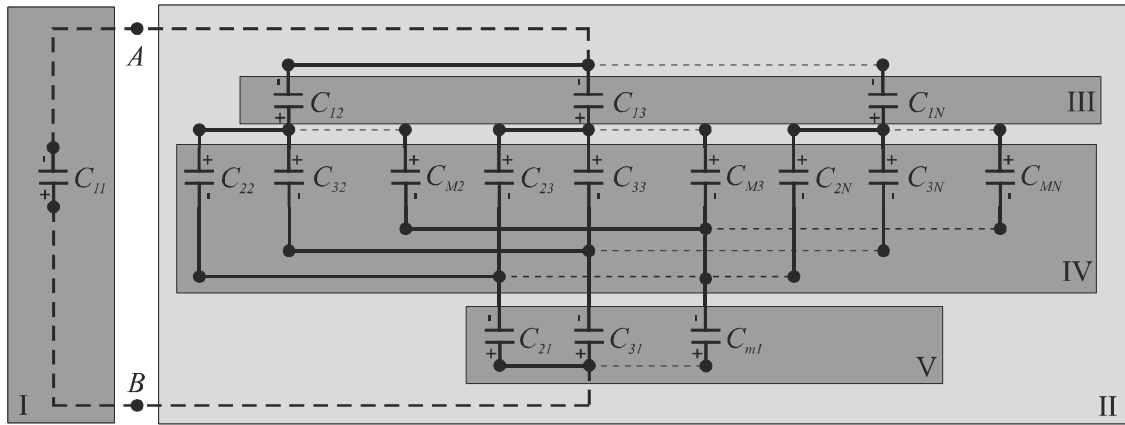


Bild 38: Elektrische Zeichnung der  $(M, N)$ -Messmatrix

Es ist auch sofort aus der Zeichnung (Bild 38) ersichtlich, dass die Kondensatoren in Bereichen III, IV, und V jeweils zueinander parallel und die Bereiche selbst in Reihe geschaltet sind. Damit erhält man die Gesamtladung am Kondensator  $C_{11}$ :

$$Q_{11} = \frac{M+N-1}{MN} \left\{ Q_{11}^0 + \frac{(M-1)}{M+N-1} \sum_{i=2}^N Q_{1i}^0 - \frac{1}{M+N-1} \sum_{i=2}^M \sum_{j=2}^N Q_{ij}^0 + \frac{(N-1)}{M+N-1} \sum_{i=2}^M Q_{i1}^0 \right\}. \quad (5.4)$$

Analog zur Gl. (5.3) lässt sich auch die Beziehung für einen allgemeinen Fall in Matrixform mit  $S_I = \frac{M-1}{MN}$ ,  $S_{II} = \frac{N-1}{MN}$ ,  $S_{III} = \frac{M+N-1}{MN}$  und  $S_{IV} = -\frac{1}{MN}$  zu:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ \vdots \\ Q_{1N} \\ Q_{21} \\ Q_{22} \\ \vdots \\ Q_{MN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{III} & S_I & \dots & S_I & S_{II} & S_{IV} & \dots & S_{IV} \\ S_I & S_{III} & \dots & S_I & S_{IV} & S_{II} & \dots & S_{IV} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_I & S_I & \dots & S_{III} & S_{IV} & S_{IV} & \dots & S_{II} \\ S_{II} & S_{IV} & \dots & S_{IV} & S_{III} & S_I & \dots & S_{IV} \\ S_{IV} & S_{II} & \dots & S_{IV} & S_I & S_{III} & \dots & S_{IV} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{IV} & S_{IV} & \dots & S_{II} & S_{IV} & S_{IV} & \dots & S_{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}^0 \\ Q_{12}^0 \\ \vdots \\ Q_{1N}^0 \\ Q_{21}^0 \\ Q_{22}^0 \\ \vdots \\ Q_{MN}^0 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

angeben bzw. in Kurzschreibweise:



$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{Q}^0. \quad (5.6)$$

## 5.2 Simulation des Ausleseverfahrens einer Messmatrix

Beim Auslesen der Ladungen auf der piezoelektrischen Folie muss man die Auslesereihenfolge der Messpunkte beachten. Aus praktischen Gründen sollen die Messpunkte zeilenweise ( $Q_{11}, \dots, Q_{1N}, \dots, Q_{M1}, \dots, Q_{MN}$ ) ausgelesen werden. Es soll vorausgesetzt werden, dass jeder Messpunkt ausgelesen wird. Das Auslesen der Messpunkte eines piezoelektrischen Multisensor-Array wird mit der Entnahme einer bestimmten Ladungsmenge  $Q_G$  aus dem Kondensatormodell verglichen. Das soll wieder an einem Beispiel mit vier Messpunkten verdeutlicht werden.

### 5.2.1 (2,2)-Messmatrix

Die zusammengeschalteten Kondensatoren sind mit den Werten ( $Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}$ ) geladen. Im ersten Schritt wird die Messstelle  $P_{11}$  auf der piezoelektrischen Folie ausgemessen, wobei  $Q_{G11}$  der ausgelesene Messwert ist. Im Kondensatormodell bedeutet dies, dass zwischen den Punkten AB die Ladung  $Q_{G11}$  entnommen wird.

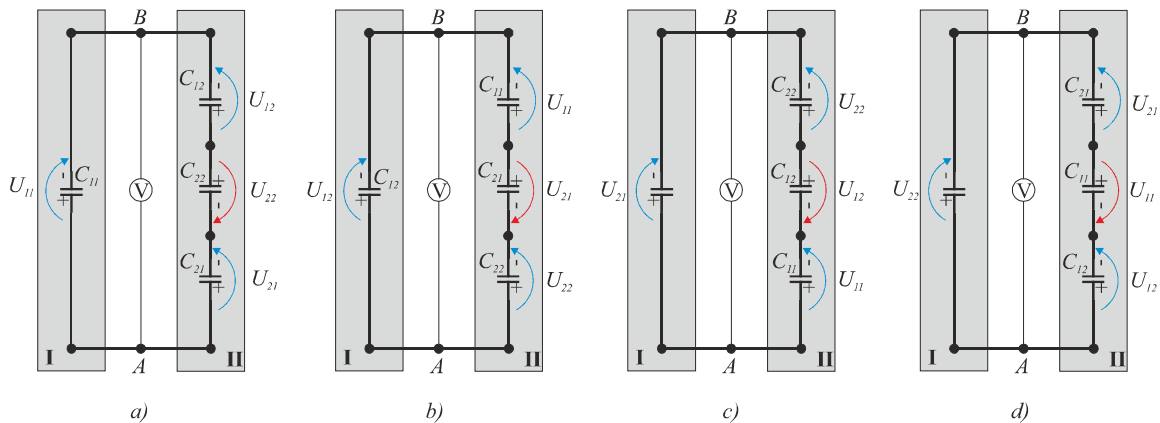


Bild 39: Reihensequenz der Entladung a) 1. Schritt; b) 2. Schritt; c) 3. Schritt; d) 4. Schritt

Die Bereiche I und II auf dem Bild 39a sind parallel zueinander geschaltet und es gilt:

$$\begin{aligned} Q_{11} - \frac{3}{4} Q_{G11} &= 0, \\ Q_{12} - \frac{1}{4} Q_{G11}, \\ Q_{21} - \frac{1}{4} Q_{G11}, \\ Q_{22} + \frac{1}{4} Q_{G11}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

woraus folgt:

$$Q_{11} = \frac{3}{4} Q_{G11}. \quad (5.8)$$

Im zweiten Schritt wird zwischen den Punkten AB (Bild 39b) die gemessene Ladung  $Q_{G12}$  entnommen. Somit folgt:

$$\begin{aligned}
Q_{12} - \frac{1}{4}Q_{G11} - \frac{3}{4}Q_{G12} &= 0, \\
Q_{21} - \frac{1}{4}Q_{G11} + \frac{1}{4}Q_{G12} &, \\
Q_{22} - \frac{1}{4}Q_{G11} - \frac{1}{4}Q_{G12} &,
\end{aligned} \tag{5.9}$$

bzw. :

$$Q_{12} = \frac{3}{4} \left( Q_{G12} + \frac{1}{3}Q_{G11} \right). \tag{5.10}$$

Im dritten (Bild 39c) und vierten Schritt (Bild 39d) erfolgt die Entnahme der gemessenen Ladung  $Q_{G21}$  und  $Q_{G22}$ . Demnach ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
Q_{21} &= \frac{3}{4} \left( \frac{1}{3}Q_{G11} - \frac{1}{3}Q_{G12} + Q_{G21} \right), \\
Q_{22} &= \frac{3}{4} \left( -\frac{1}{3}Q_{G11} + \frac{1}{3}Q_{G12} + \frac{1}{3}Q_{G21} + Q_{G22} \right).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Somit ergeben sich die Gleichungen für die Berechnung von Ladungen an den Kondensatoren (Gl. (5.8), (5.10) und (5.11)) in Matrixform zu:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{21} \\ Q_{22} \end{bmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{G11} \\ Q_{G12} \\ Q_{G21} \\ Q_{G22} \end{bmatrix}. \tag{5.12}$$

Für das Beispiel aus der Tabelle 32 lassen sich somit nach Gl. (5.12) die Ladungen auf den einzelnen Kondensatoren berechnen (Tabelle 33).

Tabelle 33 - gemessene Ladung an einem Sensor mit vier Messpunkten

Messpunkt ij	Last in $\left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	Gemessen (FEM) $Q_{Gij}$ in [nC]	Referenzladung (FEM) $Q_{ij}$ in [nC]	Ladung nach Gl. (5.12) $Q_{ij}$ in [nC]
11	100	0,589417	0,441534	0,442063
12	200	0,981543	0,883067	0,883512
21	300	1,89692	1,3246	1,324659
22	400	1,59173	1,76614	1,766059

In diesem Beispiel enthält der Lastvektor keine Nullenergiemodi, daher lässt sich die Beziehung nach Gl. (5.12) gut anwenden.

### 5.2.2 $(M, N)$ -Messmatrix

Ähnlich dem Beispiel mit dem Aufladen der vier Kondensatoren (Bild 39) lassen sich die Beziehungen für einen allgemeinen Fall der  $(M, N)$ -Messmatrix definieren:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ \vdots \\ Q_{1N} \\ Q_{21} \\ Q_{22} \\ \vdots \\ Q_{MN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{III} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S_I & S_{III} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_I & S_I & \dots & S_{III} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ S_{II} & S_{IV} & \dots & S_{IV} & S_{III} & 0 & \dots & 0 \\ S_{IV} & S_{II} & \dots & S_{IV} & S_I & S_{III} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{IV} & S_{IV} & \dots & S_{II} & S_{IV} & S_{IV} & \dots & S_{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{G11} \\ Q_{G12} \\ \vdots \\ Q_{G1N} \\ Q_{G21} \\ Q_{G22} \\ \vdots \\ Q_{GMN} \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

bzw. :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_G. \quad (5.14)$$

Zu bemerken ist, dass die Matrix  $\mathbf{B}$  die untere Dreiecksmatrix der Matrix  $\mathbf{A}$  ist. Diese Tatsache kommt dadurch zustande, dass bei der Matrix  $\mathbf{A}$  die Aufladung an den Kondensatoren gleichzeitig erfolgt. Für das Nacheinander-Aufladen bedeutet es daher, dass die Positionen oberhalb der Hauptdiagonalen null sind.

### 5.3 Einzelne Messsignale und gemessene Werte

Ausgehend von den zuvor hergeleiteten Beziehungen Gl. (5.6) und (5.14) kann ein Zusammenhang zwischen den einzelnen Messsignalen und den gemessenen Werten abgeleitet werden. Wenn  $\mathbf{Q}^0$  die Anfangsladungen auf den Kondensatoren vor einem Zusammenschluss repräsentieren, dann ergeben sich die gemessenen Werte zu:

$$\mathbf{Q}_G = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}^0. \quad (5.15)$$

$\mathbf{Q}^0$  repräsentieren somit die elektrischen Signale, die nach Gl. (3.22) berechnet werden und  $\mathbf{Q}_G$  die alternativ gemessenen elektrischen Signale mittels Messmatrix.

Die Berechnung von den Anfangsladungen  $\mathbf{Q}^0$  anhand gemessener Werte  $\mathbf{Q}_G$ :

$$\mathbf{Q}^0 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_G, \quad (5.16)$$

ist nicht immer eindeutig möglich. Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist singulär und somit nicht invertierbar. Es ist zwar möglich, eine pseudoinverse Matrix zu berechnen, sobald allerdings die elektrischen Signale die Anteile der Nullenergiemodi enthalten, lässt sich nicht auf die Anfangsladungen zurückführen. Enthalten die gemessenen Signale keine Nullenergiemodi, so vereinfacht sich die Gl. (5.16) zu Gl. (5.14). Die Kenntnis der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $\mathbf{A}$  erlaubt die Überprüfung, ob im vorliegenden Fall die Nullenergiemodi enthalten sind. Als Beispiel sind für eine (2,2)-Messmatrix die Eigenwerte  $\mathbf{E}_w$  und Eigenvektoren  $\mathbf{E}_v$  mit:

$$\mathbf{E}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_v = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

gegeben. Es liegen vier Eigenwerte vor, wobei nur einer einen Nullenergiemodus repräsentiert. Das bedeutet, dass bei einem Lastfall (1; -1; -1; 1) keine Signale gemessen werden könnten. Für die quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  Gl. (5.5) im allgemeinen Fall gibt das charakteristische Polynom  $M \cdot N$ -

Nullstellen, wovon offensichtlich  $(M - 1) \cdot (N - 1)$  Nullenergiemodi sind. Dadurch führt die steigende Anzahl der Messpunkte zu einer höheren Wahrscheinlichkeit, dass die Lastfälle die Anteile der Nullenergiemodi enthalten können.

Es soll ein Beispiel mit dem Lastvektor  $(1; 0,9; 0,9; 0,9)$  untersucht werden. Die Multiplikation der Eigenvektoren  $E_v$  mit dem Lastvektor ergibt, dass der vorliegende Fall einen Anteil des Nullenergiemodus enthält:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,9 \\ -0,1 \\ -0,1 \\ 1,9 \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

In der Tabelle 34 sind Ergebnisse einer Rechnung der (2,2)-Messmatrix mit dem Lastvektor  $(1; 0,9; 0,9; 0,9)$  zusammengefasst.

Tabelle 34 - gemessene Ladung mit Anteilen des Nullenergiemodus

Messpunkt $P_{ij}$	Last in $\left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	Gemessen (FEM) $Q_{Gij}$ in [nC]	Referenzladung (FEM) $Q_{ij}^0$ in [nC]	Ladung nach Gl. (5.16) $Q_{ij}^0$ in [nC]
11	100	0,559445	0,441535	0,419582
12	90	0,314058	0,353228	0,375403
21	90	0,41862	0,353228	0,375310
22	90	0,383758	0,353228	0,331126

Im Rahmen dieser Arbeit kann man die relevanten Lastfälle in Form der berechneten Signale nach Gl. (3.22) auf die Nullenergiemodi bzw. deren Anteile überprüfen, in dem man unbekannte Variable  $(x_0, y_0, \beta, a_1, b_1, \dots)$  variiert. Da die Ladung proportional zur gemessenen elektrischen Spannung ist (Gl. (2.137)), können  $\mathbf{Q}_G$  und  $\mathbf{Q}^0$  durch die äquivalente Werte der elektrischen Spannung  $\mathbf{U}_G$  und  $\mathbf{U}^0$  ersetzt werden. Die stichweise Überprüfung der berechneten Signale, ebenso für die verschiedene Anzahl der Messpunkte, hat ergeben, dass (mit Ausnahme einzelner seltener Fälle) die elektrischen Messsignale die Anteile der Nullenergiemodi enthalten. Somit kann man nicht eindeutig von den gemessenen Signalen  $\mathbf{U}_G$  mittels Messmatrixmethode auf die „Ursprungssignale“  $\mathbf{U}^0$  zurückrechnen.

## 5.4 Lösung des inversen Problems mit der Matrixmessmethode

Im vorhergehenden Kapitel wurde gezeigt, dass sich die gemessenen elektrischen Signale aufgrund der vorhandenen Nullenergiemodi nicht auf die wahren generierten Signale zurückführen lassen. Damit ist die Minimierung der Funktion Gl. (5.19):

$$F = \|\mathbf{U}_M^0 - \mathbf{U}^A\| \rightarrow \min, \quad (5.19)$$

wobei  $\mathbf{U}_M^0$  die berechneten Signale nach Gl. (5.16) bzw.:

$$\mathbf{U}_M^0 = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_G, \quad (5.20)$$

und  $\mathbf{U}^A$  die analytisch berechneten Signale nach Gl. (3.22) sind, nicht mehr gewährleistet.

Aus diesem Grund kann die inverse Aufgabe nicht auf dem zuvor verwendeten Weg gelöst werden. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, bietet sich an, in dem man anhand analytischer Werte  $\mathbf{U}^A$  die hypothetischen Messsignale  $\mathbf{U}_G^A$  nach Gl. (5.15) bzw. :

$$\mathbf{U}_G^A = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}^A, \quad (5.21)$$

berechnet und die zu minimierende Funktion Gl. (5.19) entsprechend anpasst:

$$F = \|\mathbf{U}_G - \mathbf{U}_G^A\| \rightarrow \min. \quad (5.22)$$

Es soll das Messmatrixkonzept an einem schlitzförmigen geraden Riss der Länge  $2a$  in einer unendlich ausgedehnten Scheibe mit isotropem linear-elastischen Material erprobt werden (vgl. Kapitel 3.6.2).

#### 5.4.1 Allseitiger Zug und Mixed-Mode-Belastung einer unendlichen Scheibe

Hier sollen zwei Belastungsfälle mit zum Riss parallel unter Mixed-Mode-Belastung und schräg liegender Sensorfolie unter einachsigen Zug betrachtet werden (siehe Bild 40 mit  $A = 0,25 \text{ mm}^2$ ,  $C_f = 0,1 \text{ nF}$ ,  $a = 20 \text{ mm}$ ).

Im Fall der schräg liegenden Sensorfolie unter Zug entspricht die lokale Lage der Kreuzungspunkte auf der Folie der Messelektrodenlage aus dem Kapitel 3.6.2 (siehe Bild 21). In der Tabelle 35 sind die entsprechenden elektrischen Signale nach Gl. (5.21) in [mV] angegeben.

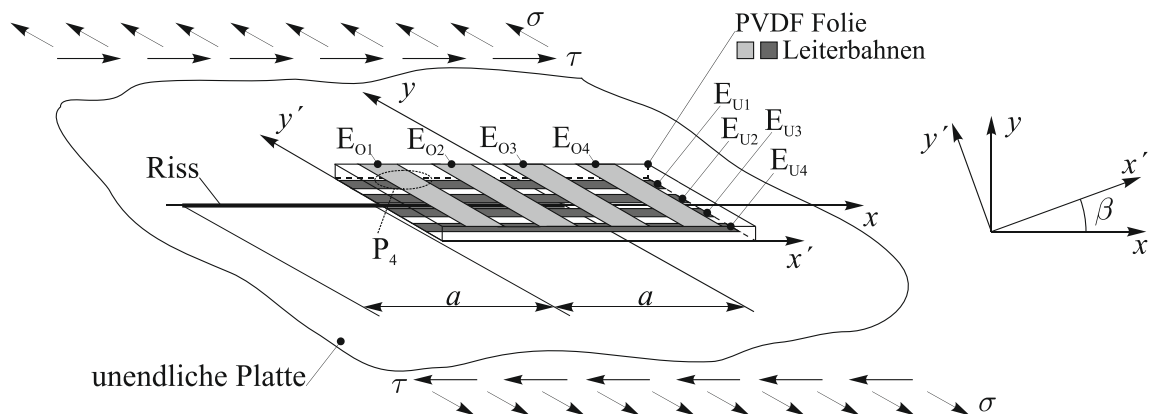


Bild 40: Folie-Matrixmesssystem auf einer unendlichen Platte unter Zug/Schub

Tabelle 35 - Elektrische Messsignale bei Modus I-Belastung

$\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 0 \text{ MPa}, \beta = 10^0$			
79,394	42,307	10,231	-8,108
91,671	14,491	-13,826	-21,862
-18,048	-43,394	35,063	-22,889
29,855	-62,402	-28,816	-22,508

Die Lösung der inversen Aufgaben nach Gl. (5.22) findet sich in der Tabelle 36, wobei der Winkel  $\beta$  als bekannt vorgegeben wird, denn sonst konvergiert die Lösung nicht.

Tabelle 36 - Lösung der inversen Aufgabe bei Modus I - Belastung ( $\beta = 10^\circ$ )

		$\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 0 \text{ MPa}$				
		Soll	S	LM	S	PA
$x_0$	[mm]	-2,00	-1,30	-2,00	-1,00	-2,00
$y_0$	[mm]	-4,00	-4,30	-4,00	-5,90	-4,00
$\beta$	[Grad]	10,00	10,00	10,00	10,00	0,0
$K_I$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	634,13	590,00	634,45	100,00	634,45
$K_{II}$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
$T$	[MPa]	-80,00	-50,00	-80,12	-30,00	-80,12
$a_3$	[MPa]	3,16	1,00	3,18	1,00	3,18
$b_3$	[MPa]	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	-1,97	-1,00	-2,00	-1,00	-2,00
$b_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00
$a_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	2,47	1,00	2,77	1,00	2,78
$b_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	0,0	0,00	0,00	0,00	0,00

In diesem Fall (Tabelle 36) liefert das PA-Verfahren gegenüber dem LM-Verfahren bezüglich der Startwerte bessere Ergebnisse.

Im Fall der Mixed-Mode-Belastung mit zum Riss parallel liegender Sensorfolie lässt sich ein ausreichendes Ergebnis nur mit Hilfe einer 7x7-Messmatrix erreichen. In der Tabelle 37 sind dazu entsprechende hypothetische elektrische Signale dargestellt. Die lokale Position der Messpunkte auf der Folie ist in der Tabelle 38 zu finden.

Tabelle 37 - Elektrische Signale unter Mixed-Mode-Belastung

		$\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 80 \text{ MPa}, \beta = 0^\circ$				
15,738	97,581	140,957	142,271	117,626	84,550	54,252
83,083	167,733	178,136	143,397	96,501	56,200	28,282
194,677	240,290	187,053	113,620	56,306	21,655	4,352
370,437	279,386	141,422	50,677	7,179	-8,045	-10,479
674,560	201,343	23,167	-27,104	-30,105	-21,094	-12,565
-350,387	-204,27	-129,555	-70,194	-32,677	-13,370	-5,254
-302,800	-79,029	-65,513	-19,313	-0,520	3,178	1,704

Tabelle 38 - Koordinaten der Messpunkte auf der Folie

$y' \backslash x'$	0	2	4	6	8	10	12
12	P <sub>7</sub>	P <sub>14</sub>	P <sub>21</sub>	P <sub>28</sub>	P <sub>35</sub>	P <sub>42</sub>	P <sub>49</sub>
10	P <sub>6</sub>	P <sub>13</sub>	P <sub>20</sub>	P <sub>27</sub>	P <sub>34</sub>	P <sub>41</sub>	P <sub>48</sub>
8	P <sub>5</sub>	P <sub>12</sub>	P <sub>19</sub>	P <sub>26</sub>	P <sub>33</sub>	P <sub>40</sub>	P <sub>47</sub>
6	P <sub>4</sub>	P <sub>11</sub>	P <sub>18</sub>	P <sub>25</sub>	P <sub>32</sub>	P <sub>39</sub>	P <sub>46</sub>
4	P <sub>3</sub>	P <sub>10</sub>	P <sub>17</sub>	P <sub>24</sub>	P <sub>31</sub>	P <sub>38</sub>	P <sub>45</sub>
2	P <sub>2</sub>	P <sub>9</sub>	P <sub>16</sub>	P <sub>23</sub>	P <sub>30</sub>	P <sub>37</sub>	P <sub>44</sub>
0	P <sub>1</sub>	P <sub>8</sub>	P <sub>15</sub>	P <sub>22</sub>	P <sub>29</sub>	P <sub>36</sub>	P <sub>43</sub>

Das Ergebnis der Lösung der inversen Aufgabe nach Gl. (5.22) ist in der Tabelle 39 wiedergegeben.

Tabelle 39 - Lösung der inversen Aufgabe bei Mixed-Mode-Belastung ( $\beta = 0^\circ$ )

		$\sigma = 0 \text{ MPa}, \tau = 80 \text{ MPa}, \beta = 0^\circ$				
		Soll	S	LM	S	PA
$x_0$	[mm]	-2,00	-1,7	-2,00	-1,80	-1,99
$y_0$	[mm]	-3,00	-2,7	-3,00	-2,80	-3,00
$\beta$	[Grad]	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00
$K_I$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	634,13	100,00	633,95	500,00	631,70
$K_{II}$	[MPa $\sqrt{\text{mm}}$ ]	634,13	100,00	634,21	500,00	633,87
$T$	[MPa]	-80,00	-10,00	-79,96	-70,00	-79,14
$a_3$	[MPa]	3,16	1,00	3,16	1,00	3,05
$b_3$	[MPa]	-3,16	-1,00	-3,17	-1,00	-3,13
$a_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	-1,97	-1,00	-1,88	-1,00	-1,74
$b_5 \cdot 10^{-2}$	[MPa]	1,97	1,00	1,99	1,00	1,87
$a_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	2,47	1,00	1,81	1,00	-1,85
$b_7 \cdot 10^{-4}$	[MPa]	-2,47	-1,00	-1,82	-1,00	-3,72

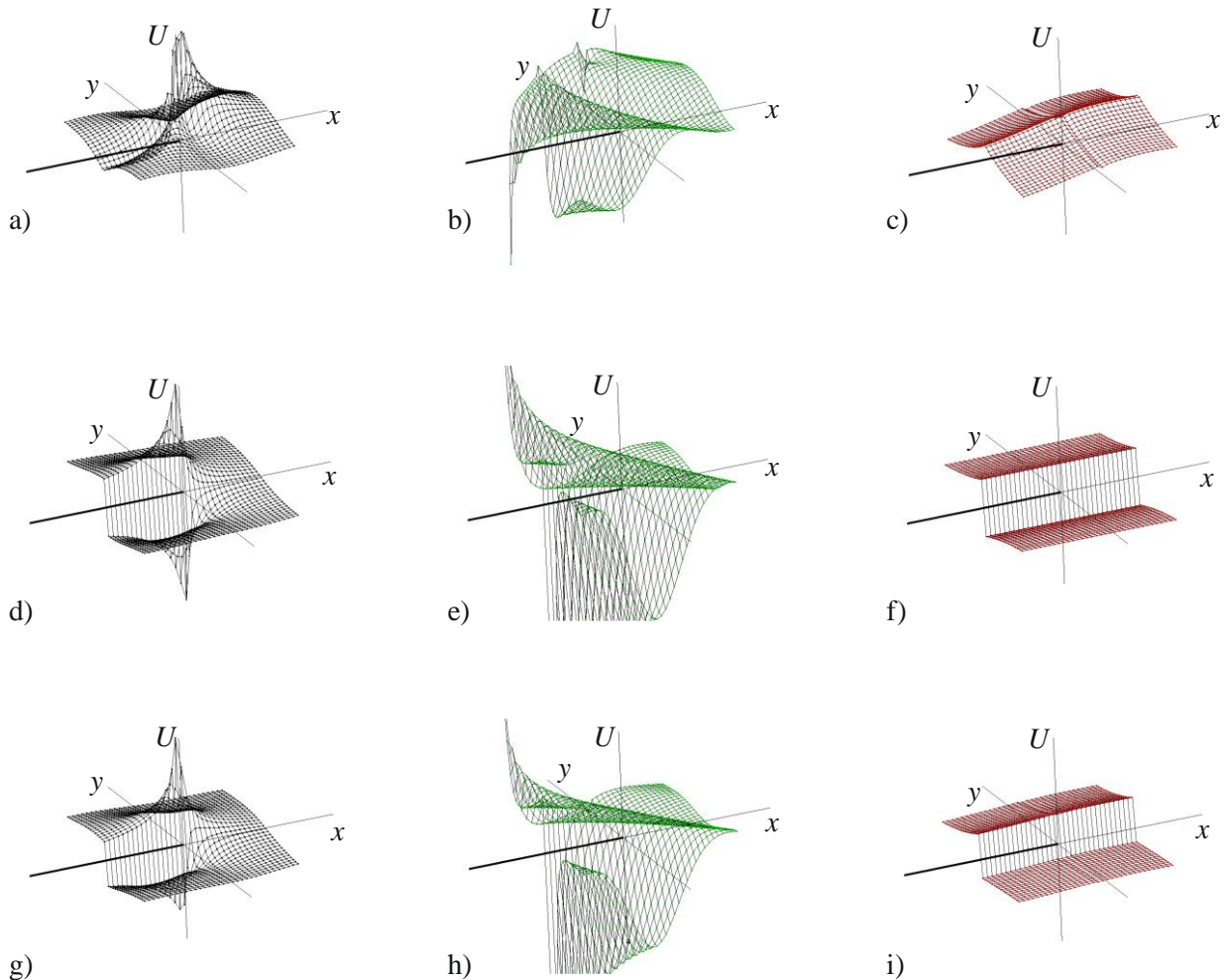


Bild 41: Funktionsverlauf der hypothetischen elektrischen Signale (a, b, c)  $\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 0 \text{ MPa}$ ; (d, e, f)  $\sigma = 0 \text{ MPa}, \tau = 80 \text{ MPa}$ ; (g, h, i)  $\sigma = 80 \text{ MPa}, \tau = 80 \text{ MPa}$ , wobei (a, d, g) Signale sind, die man durch einzelne Elektroden messen würde, (b, e, h) Signale, die man mittels Matrixmessverfahren aufnehmen würde und (c, f, i) Spannungswerte, die nach Gl. (5.20) ermittelt wurden.

Bei 49 Messpunkten ist das LM-Verfahren besser zur Lösung des inversen Problems geeignet. Vor allem die Rechenzeit ist deutlich kleiner als bei dem PA-Verfahren. In beiden Fällen ist jedoch die Wahl geeigneter Startwerte problematisch.

Auf dem Bild 41 ist der Funktionsverlauf der elektrischen Signale auf einer unendlichen Scheibe mit einem Riss der Länge  $2a$  bei reinem Modus I, Modus II und Mixed-Mode abgebildet. Würde man nur mit einzelnen Elektroden messen (Bild 41 a, d, g), so ist die Rissspitzenposition eindeutig innerhalb vier Messelektroden mit dem Betrag der größten Signale erkennbar. Die gemessenen Signale nach der Matrixmessmethode (Bild 41 b, e, h) geben graphisch keinen erkennbaren Aufschluss über die Rissspitzenposition wieder. Dagegen kennzeichnen die nach Gl. (5.20) berechneten Signale (Bild 41 c, f, i) die Rissspitze durch den markanten Funktionsverlauf bei ausreichender Anzahl der Messpunkte (ca. ab  $7 \times 7$  Messfeld und 2 mm Abstand zwischen den Messpunkten). Somit lässt sich die Rissspitze innerhalb von vier Messpunkten eindeutig identifizieren. Des Weiteren kann für die genauere Positionsbestimmung der Rissspitze ein neuronales Netz herangezogen werden. Ein trainiertes Netz mit vier Eingangsneuronen sollte letztendlich die Rissspitzenposition berechnen. Die graphische Auswertung der elektrischen Signale bildet ein neues Gebiet im vorgestellten Konzept.



## 6 Weg zur technischen Umsetzung des Sensorkonzeptes

Die praktische Umsetzung des Sensorkonzeptes erfordert in erster Linie die schrittweise Lösung von Problemen technischer Art. Im Weiteren sollen diese Probleme, die bei der Anfertigung und Inbetriebnahme des Sensors entstanden sind [105], aufgezeigt werden.

Um die ersten Anwendungserfahrungen zu gewinnen, wurde eine PVDF-Sensorfolie mit 49 Messelektroden angefertigt und auf eine AL 7075 Zugprobe mit scharfen Ermüdungsanriss geklebt (Bild 42a). Die Lage der Elektroden bezüglich des Risses ist dem Bild 42b zu entnehmen. Auf dem Bild 43 ist die eingespannte Zugprobe mit der Ladungsverstärkereinheit abgebildet und eine einzelne Elektrode.

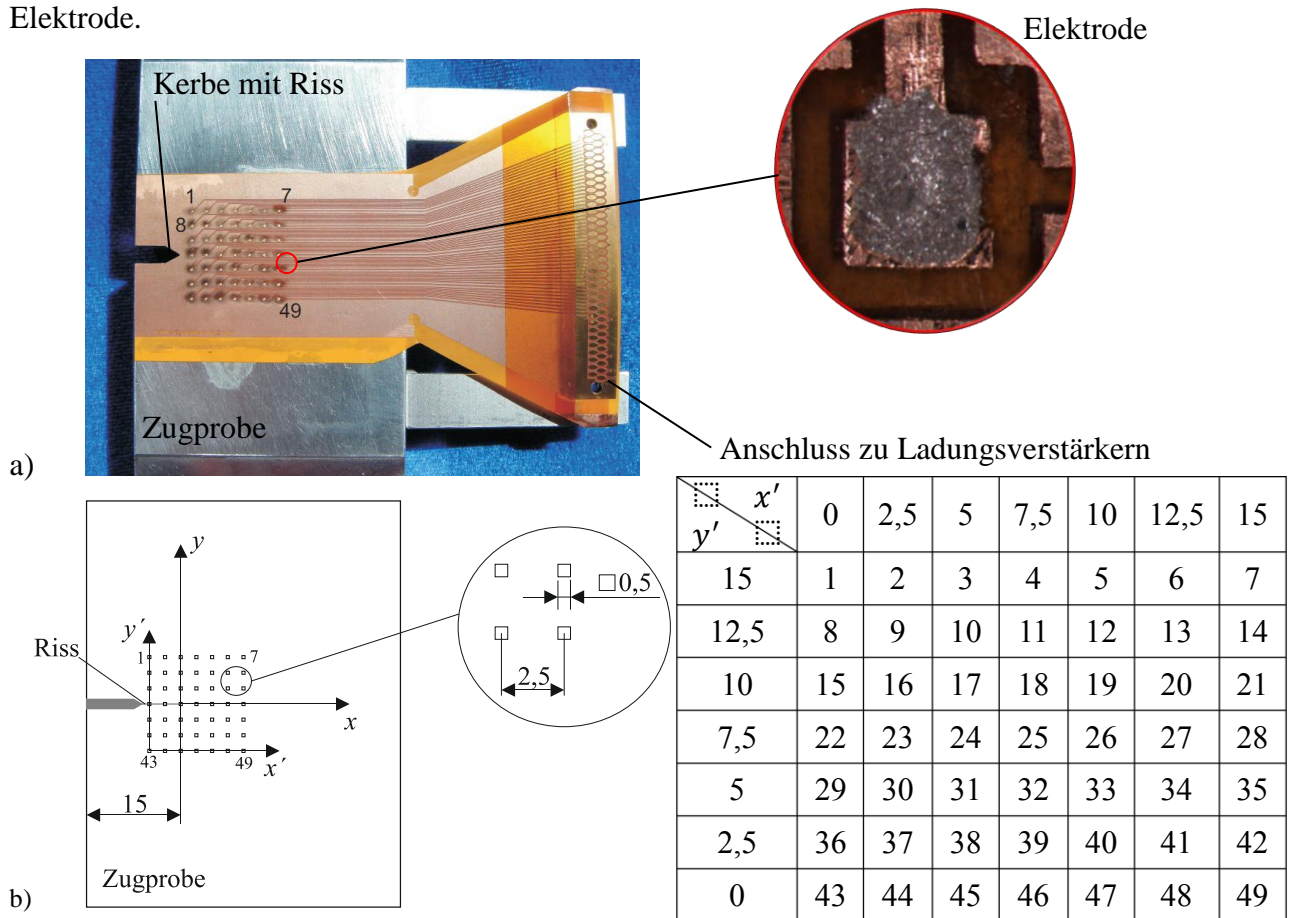


Bild 42: a) Zugprobe mit 49 Messelektroden [105] b) Lage der Messelektroden auf der Folie [105]

Während der Messung stellte sich heraus, dass die elektrischen Signale (Bild 44) sehr stark mit Rauschen behaftet sind, was auf die verwendeten Ladungsverstärker zurückzuführen ist. Ebenso konnte festgestellt werden, dass während des Zugversuchs die erwartete Symmetrie der Signale bezüglich des Ligaments (Bild 45b) nicht eintrat. Die Ursache hierfür könnte einerseits in der inhomogenen Klebverbindung und andererseits in den möglichen Defekten der Ladungsverstärker liegen.

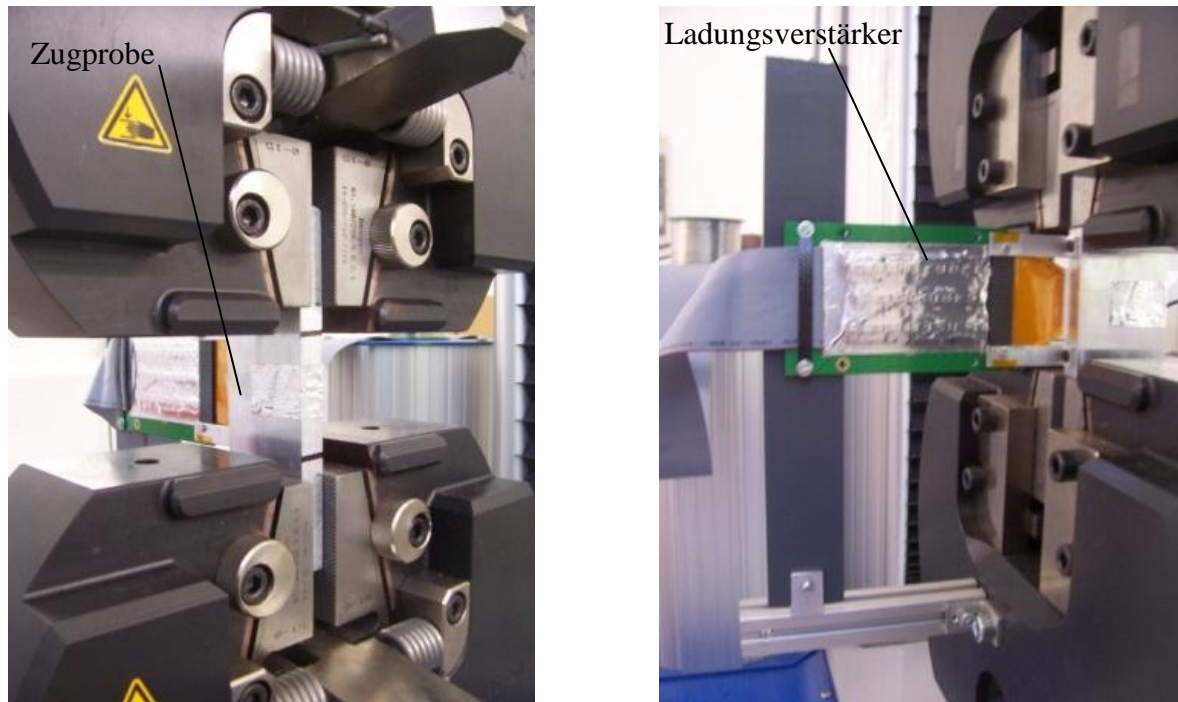


Bild 43: Versuchsaufbau [105]

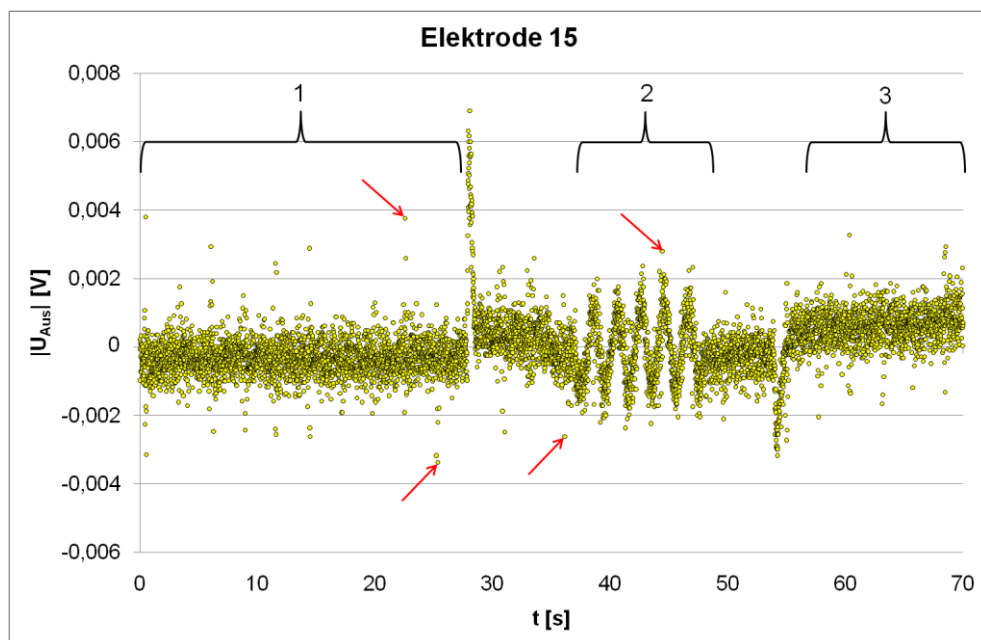


Bild 44: Gemessene elektrische Signale an der Elektrode Nr. 15. Zyklische Zugbelastung im Bereich 2, Bereich 1 und 3 Lastfrei [105]

Trotz der Unmöglichkeit, die Signale quantitativ zur Bestimmung der  $K$ -Faktoren auszuwerten, wurde bezüglich der Rissidentifikation (Bild 45a) ein Erfolg erzielt, was die prinzipielle praktische Machbarkeit des Sensorkonzeptes bestätigt. Auf der Basis der gesammelten Erfahrung mit dem hergestellten Sensor konnten neue Erkenntnisse für einen verbesserten Sensoraufbau gewonnen werden.

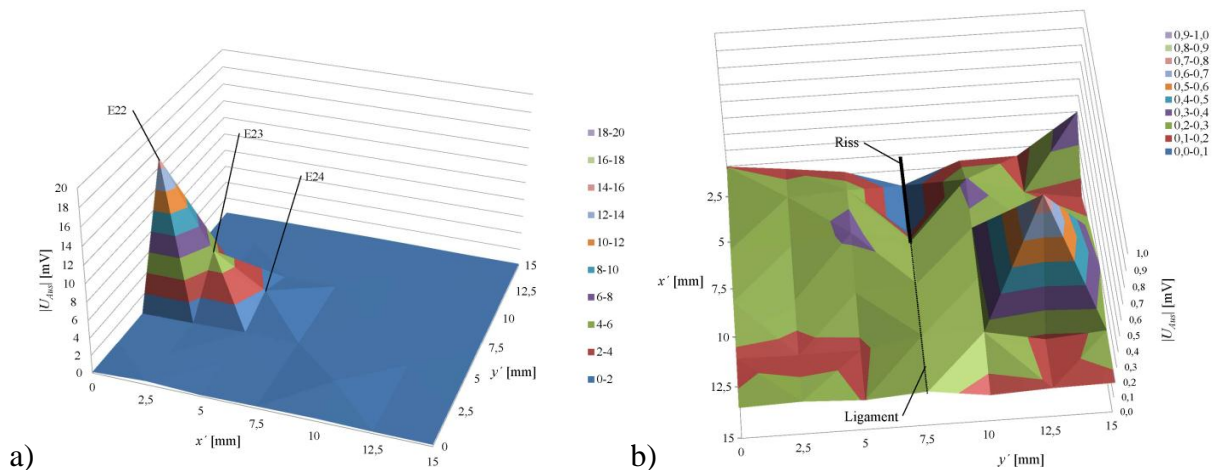


Bild 45: Gemessene elektrische Signale a) aller Elektroden b) ohne 22., 23., 24. Elektrode [105]

Im ersten Schritt werden Sensoren mit einfachem Aufbau (z. B. Bild 46 eine großflächige Elektrode, vier Elektroden auf einer Folie usw.) an einem schwingenden Balken (Bild 47) getestet. Die dazugehörigen modifizierten Ladungsverstärker erlauben zurzeit nur einfache Experimente zur Untersuchung des Rauschverhaltens des Messsystems, der Sensibilität der Folie gegenüber äußeren Einflüssen (z.B. Temperaturschwankungen) und der Signalstärke sowie die Abschätzung der kleinstmöglichen Lastfrequenz. Auch die Notwendigkeit der Abschirmung der Messelektroden sollte geprüft werden. Damit kann die Eignung der Ladungsverstärker bezüglich Rauschen, Übersteuerung, Kleinsignalverhalten (im Bereich 0,1 bis 1 pC) und Empfindlichkeit überprüft werden. Im Fall der experimentellen Eignung der Ladungsverstärker können die relevanten Materialparameter  $C_0$ ,  $C_{11}$  und  $C_{22}$  in Gl. (3.22) im Versuch bestimmt werden.

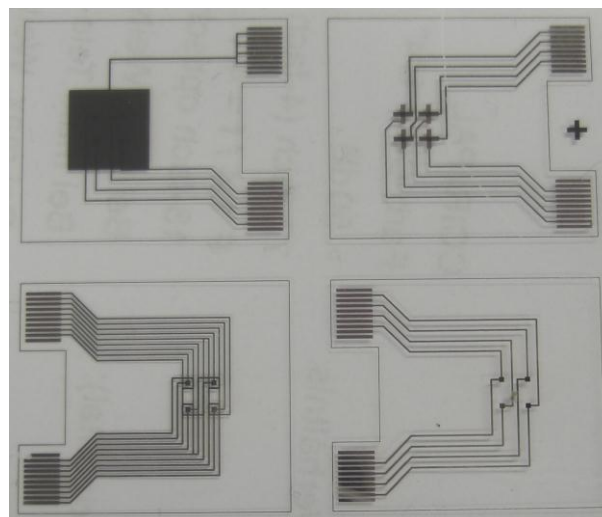


Bild 46: Beispiele der hergestellten Sensor-Layouts mit Leiterbahnen

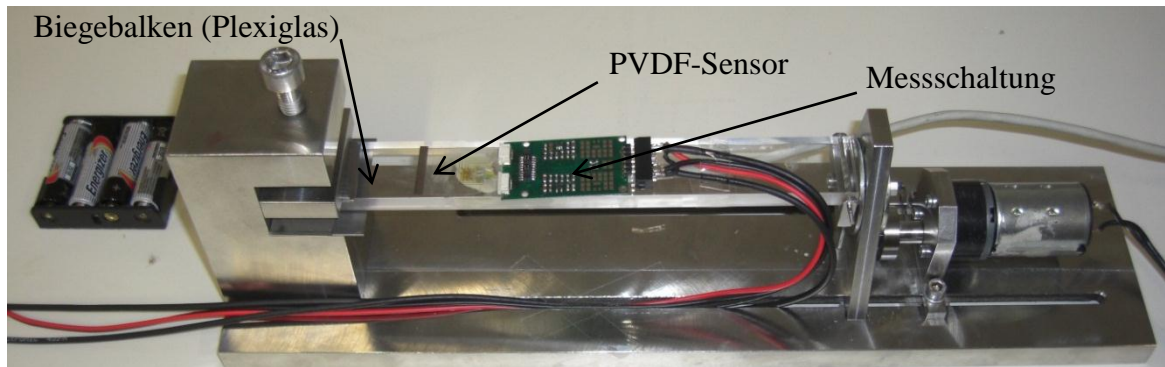


Bild 47: Versuchsaufbau. Balken mit einem PVDF-Sensor

Ausgehend von den Ergebnissen zu den Materialparametern können prinzipielle experimentelle Untersuchungen an ruhenden Rissen stattfinden. Der noch ausstehende beträchtliche experimentelle Aufwand erfordert eine weitere Fortsetzung des Forschungsvorhabens, ermöglicht aber bei Erfolg eine Anwendung des Sensorkonzeptes auf reale Bauteile, Tragwerke und Konstruktionen, insbesondere im Bereich der Fahrzeug-, Luft- und Raumfahrttechnik.

## Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war die Entwicklung eines Sensors zur gleichzeitigen Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren ( $K$ -Faktoren) und der Risslage (Koordinaten und Winkel). Im Gegensatz zum Stand der Technik werden zwei Aufgaben zur Charakterisierung der Risse (Detektierung von Risslage und Größe und Quantifizierung des Beanspruchungszustandes an der Risspitze) mit Hilfe nur eines Sensors ermöglicht. Das Ziel war, effiziente, kostengünstige und leicht zu applizierende Techniken zur experimentellen bruchmechanischen Beanspruchungsanalyse zu entwickeln und damit eine in-situ Langzeitüberwachung der Struktur zur Bewertung von Ermüdungsrissen und zur Vorhersage der Restlebensdauer zu gewährleisten. Im Mittelpunkt stand die Ausarbeitung der theoretischen Grundlagen des Sensors und die Ableitung der Auswerteformalismen der elektrischen Signale einer orthotropen piezoelektrischen Polyvinylidenfluorid (PVDF)-Folie. Eine Struktur mit Riss wird großflächig mit der Sensorfolie beklebt und eine ausreichende Anzahl von Elektroden befindet sich im Bereich des möglichen/vorhandenen Risses. Die an den Elektroden abgegriffenen elektrischen Potentiale bzw. Ladungen sind ein Maß für die Verzerrungen an der Oberfläche des Bauteils und ermöglichen die Berechnung der bruchmechanischen Größen am Riss. Die Berechnung der Unbekannten (Risslage,  $K$ -Faktoren) erfordert die Lösung einer nichtlinearen Optimierungsaufgabe aus einem bestimmten Messdatensatz. Hierzu werden bekannte Lösungsalgorithmen, wie z. B. der LEVENBERG-MARQUARDT Algorithmus, herangezogen. Aufgrund der Existenz der Lösungsmannigfaltigkeit müssen immer mehr Messpunkte als die Anzahl der Unbekannten vorliegen. Die Genauigkeit der Ergebnisse und die Effizienz bei der numerischen Lösung hängen in erster Linie von der Genauigkeit der Messwerte ab.

Es wurden theoretische Zusammenhänge zwischen den elektrischen Signalen einer PVDF-Folie und den  $K$ -Faktoren sowie der Risslage hergeleitet. Dabei beschränkte man sich auf die Anwendung des Sensorkonzeptes im Rahmen der Scheiben- und Plattentheorie. Es wurden verschiedene Identifikationsalgorithmen (Verfahren nach NEWTON, LEVENBERG-MARQUARDT, Principal Axis Methode, neuronale Netze) bezüglich ihrer Eignung, Konvergenz und Genauigkeit anhand synthetisch mit FEM berechneter Messsignale erprobt und bewertet. Die besten Erfahrungen wurden mit der Principal Axis Methode gemacht. Die Erprobung des Sensorkonzeptes am Beispiel des GRIF-FITH-Risses gab Auskunft über den maximalen Abstand der Messelektroden von der Risspitze und der damit zusammenhängenden Genauigkeit der Ergebnisse. Der konzipierte Sensor ist insbesondere zur Überwachung von Rissen unter Bedingungen der linear-elastischen Bruchmechanik gedacht. Eine besonders wichtige Rolle spielt hier die Überwachung von Ermüdungsrisswachstum, bei dem die Risspfade zumeist große Krümmungsradien aufweisen und überwiegend einer Modus I- Belastung ausgesetzt sind. In diesem Fall liefert die Lösung des inversen Problems sehr gute Ergebnisse, was die Identifikation der Risslage anbelangt. Die Fehler der ermittelten  $K_I$ -Faktoren liegen bei numerisch simulierten Belastungszuständen (FEM Rechnungen) unterhalb von 10%. Im Fall des GRIFFITH-Risses liegt die Abweichung deutlich unter 1%.

Ausgehend von den erfolgreichen Ergebnissen bei der Anwendung des Sensorkonzeptes in der Scheibentheorie erfolgte die Erweiterung des Konzeptes zur Bestimmung von  $K$ -Faktoren und Risslagen auf stationäre und wachsende Risse (Ermüdungsbruch) in der Plattentheorie. Dazu ste-

hen zwei oft in der Praxis angewendete Plattentheorien zur Verfügung. Die weitverbreitete Plattentheorie nach KIRCHHOFF beschreibt das Verhalten einer schubstarren Platte. Aufgrund der definierten Annahmen müssen drei an den Rissufern vorliegende Randbedingungen in zwei umstrukturiert werden, weshalb der exakte Spannungszustand an der Rissspitze durch die KIRCHHOFFsche Plattentheorie nicht korrekt abgebildet werden kann. Allerdings lässt sich ab einem bestimmten Abstand von der Rissspitze die KIRCHHOFFsche Plattentheorie anwenden. Die berechneten Platten-Spannungsintensitätsfaktoren ( $k_1, k_2$ ) lassen sich aber schwer als Beanspruchungsgrößen interpretieren. Einen speziellen Fall bilden sehr dünne Platten, für die eine Umrechnungsvorschrift in die wohlbekannten  $K$ -Faktoren aus der Scheibentheorie existiert. Demzufolge ist die Anwendung des Sensorkonzeptes nach der KIRCHHOFFschen Plattentheorie einerseits durch Auswertung der  $k$ -Faktoren und andererseits durch die Platzierung der Messpunkte in einem bestimmten Bereich begrenzt.

Es existiert eine Vielzahl von Plattentheorien, die das Schubelastische Verhalten der Platte beachten. Dabei wird der Einfluss von Schubverformungen im Querschnitt durch die Drehwinkel der Plattenquerschnitte berücksichtigt. Somit führt das Plattenmodell auf ein System gekoppelter partieller Differentialgleichungen sechster Ordnung und demzufolge können drei Randbedingungen an den Rissufern erfüllt werden. Die bekanntesten Theorien auf diesem Gebiet sind mit den Namen von REISSNER und MINDLIN verbunden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die MINDLINSche Plattentheorie für das Sensorkonzept ausgewählt. Die in dieser Theorie definierten Platten-Spannungsintensitätsfaktoren ( $K_1, K_2$ ) lassen sich im Gegensatz zu KIRCHHOFFschen  $k$ -Faktoren in die normalen  $K$ -Faktoren, aufgrund der gleichen Winkelfunktionen an der Rissspitze, umrechnen. Jedoch liegt der Konvergenzradius  $R$  der Reihenentwicklung der Spannungen bei dieser Plattentheorie ca. im Bereich  $R < h/10$ . Somit lässt sich das Sensorkonzept für die der MINDLINSchen Plattentheorie zurzeit nicht effektiv umsetzen.

Neben dem konventionellen Sensoraufbau mit einzelnen Messelektroden wurden die Grundlagen zum alternativen Sensoraufbau erarbeitet, wodurch die Anzahl der Messpunkte gesteigert werden kann. Die PVDF-Folie wird jeweils auf der Ober- und Unterseite mit parallelen Leiterbahnen versehen. Die Richtung der Leiterbahnen auf der Ober- und Unterseite sind dabei um  $90^\circ$  gegeneinander versetzt. Die Ladungsmessung erfolgt durch Kurzschließen von Leiterbahnen über einen Ladungsverstärker. Die Untersuchungen haben ergeben, dass bei diesem Sensoraufbau alle Messpunkte sich wie zusammengeschlossene Kondensatoren, die mit einander agieren, verhalten, wodurch eine Auswertung der gemessenen Signale erschwert wird. Um diesen Sensoraufbau erfolgreich anwenden zu können, bedarf es einer Erweiterung des Sensorkonzeptes. Eine graphische Auswertung der Messsignale kann die Risslage bzw. Rissspitze liefern. Durch die Kenntnis der Rissposition vereinfacht sich die Lösung des nichtlinearen Problems zur Lösung eines linearen Gleichungssystems. Dadurch kann die Effizienz des Sensorkonzeptes gesteigert werden.

Neben der theoretischen Arbeit entstand ein LABVIEW-Programm zur Messwertaufnahme und zur Auswertung elektrischer Signale, wodurch eine Bestimmung charakteristischen Rissgrößen direkt im Versuch stattfinden kann.



# Anhang

## A.1 Materialkonstanten PVDF

Die benötigten Materialtensoren sind wie folgt strukturiert:

$$\{c^E\} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \{e\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \{\kappa^\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \kappa_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22}^\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}^\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Materialkonstanten der PVDF-Folie:

$$\{c^E\} = \begin{pmatrix} 3610 & 1610 & 1420 & 0 & 0 & 0 \\ 1610 & 3130 & 1310 & 0 & 0 & 0 \\ 1420 & 1310 & 1599,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 550 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 579,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 690 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\{e\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,2102 \\ 0 & 0 & 0 & -1,2222 & 0 & 0 \\ 1,1286 & -1,1988 & -2,8421 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{mm}^2},$$

$$\{\kappa^\varepsilon\} = \begin{pmatrix} 6,5 & 0 & 0 \\ 0 & 8,2 & 0 \\ 0 & 0 & 7,1275 \end{pmatrix} \cdot 10^{-14} \frac{\text{C}}{\text{Vmm}}.$$

## A.2 WILLIAMS-Koeffizienten der analytischen Lösung des GRIFFITH-Risses

Das Verschiebungs- und Spannungsfeld (Bild 48) kann mit Hilfe der KOLOSOVSKEN Formeln abgeleitet werden.

$$S_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\Re(\phi'), \quad S_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\phi'' + \chi''],$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2}\Re(S_1 - S_2), \quad \sigma_{yy} = \frac{1}{2}\Re(S_1 + S_2), \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{2}\Im(S_2), \quad (\text{A.1})$$

mit  $i = \sqrt{-1}$ .

Die komplexen Spannungsfunktionen  $\phi(z), \chi'(z)$  können für beide Belastungssituationen des Risses unter Modus I und II hergeleitet werden (siehe z. B. [106]). Demnach ergeben sich folgende von der komplexen Koordinate  $z = x + iy$  abhängige Funktionen:

$$\phi_I(z) = \frac{\sigma}{2}(\sqrt{z^2 - a^2} - z) + \frac{1}{4}\sigma z, \quad \phi_{II}(z) = -\frac{i\tau}{2}(\sqrt{z^2 - a^2} - z) - \frac{1}{4}i\tau z,$$

$$\chi'_I(z) = -\frac{\sigma}{2} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{1}{2}\sigma z, \quad \chi'_{II}(z) = -\frac{i\tau}{2} \cdot \frac{2z^2 - a^2}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad (\text{A.2})$$

wobei die unteren Indizes I und II den Belastungsmodus repräsentieren. Aus Gl. (A.1) und Gl. (A.2) ergibt sich das Spannungsfeld. Die Entwicklung der Funktion  $\phi'(z)$  in eine Taylor-Reihe ergibt die WILLIAMSSCHE Reihendarstellung mit den entsprechenden Koeffizienten [107]:

$$\begin{aligned}\phi'(z) &= z^{-\frac{1}{2}}f(z) + g(z), \quad \Omega'(z) = z^{-\frac{1}{2}}\bar{f}(z) + \bar{g}(z), \quad \chi''(z) = \Omega'(z) - z\phi''(z) - \phi'(z), \\ f(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m^T z^m, \quad g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^T z^m.\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

Der obere Index  $T$  steht für Taylor. Im Weiteren wird unter der Funktion  $\phi(z)$  die Summe beider Belastungsmodi verstanden, d. h.  $\phi(z) = \phi_I(z) + \phi_{II}(z)$ .

Bildet man die Ableitung von  $\phi(z)$  aus Gl. (A.2) und stellt diese in Form von Gl. (A.3) dar, wobei noch die Transformation auf die Risspitze  $z = \rho + a$  (Bild 48) zu berücksichtigen ist, ergibt sich:

$$\phi'(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\rho + a}{\sqrt{\rho + 2a}} \frac{\sigma - i\tau}{2} - \frac{1}{4}(\sigma - i\tau). \quad (\text{A.4})$$

Die Funktion  $g(z)$  stellt im Fall des GRIFFITH-Risses eine Konstante mit dem Wert  $\frac{1}{4}(\sigma - i\tau)$  dar.

Die Bildung der MAC-LAURINSchen Reihe der Funktion:

$$f(\rho) = \frac{\rho + a}{\sqrt{\rho + 2a}} \frac{\sigma - i\tau}{2}, \quad (\text{A.5})$$

liefert:

$$f(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^T \rho^m, \quad (\text{A.6})$$

mit

$$a_m^T = (-1)^m \cdot \frac{a^{0,5-m}}{m! 2^{2m+0,5}} \cdot \frac{2m+1}{2m-1} \cdot \frac{(\sigma - i\tau)}{2} \cdot \prod_{k=0}^m (2k-1).$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe lässt sich mit der Formel von CAUCHY-HADAMARD berechnen:

$$R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sup(\sqrt[m]{|a_m|})} = 2a. \quad (\text{A.7})$$

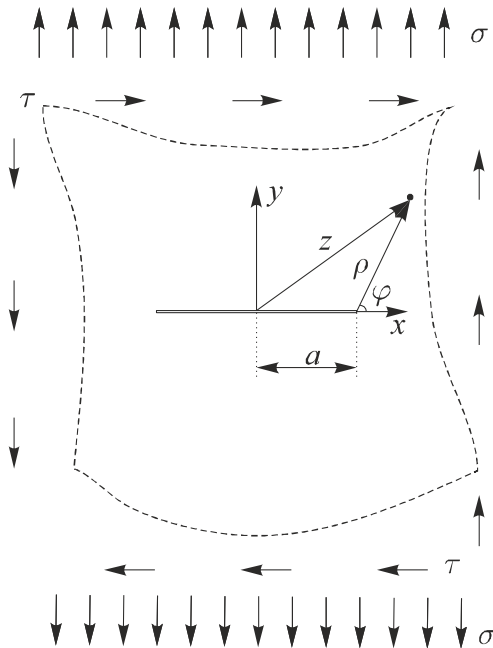


Bild 48: GRIFFITH-Riss der Länge  $2a$  unter Zug- und Schubbelastung



Um die WILLIAMS-Koeffizienten  $a_n$  bzw.  $b_n$  in der Form von Gl. (2.96) zu bestimmen, sind sie wie folgt darzustellen:

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= (-1)^m \cdot \frac{a^{0,5-m}}{m! 2^{2m+0,5}} \cdot \frac{\sigma}{2m-1} \cdot \prod_{k=0}^m (2k-1), & a_2 &= -\frac{1}{4}\sigma, \\ b_{2m+1} &= (-1)^{m+1} \cdot \frac{a^{0,5-m}}{m! 2^{2m+0,5}} \cdot \frac{i\tau}{2m-1} \cdot \prod_{k=0}^m (2k-1), & b_2 &= \frac{1}{4}i\tau, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

mit  $n = 2m + 1, m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Die Koeffizienten der WILLIAMS-Lösung mit  $n = 2(m + 1)$  für  $m > 0$  sind null. Die jeweils ersten sechs Koeffizienten der WILLIAMS-Lösung ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2}}, & \text{wobei } K_I &= a_1 \sqrt{2\pi}, & b_1 &= -\tau \sqrt{\frac{a}{2}}, & \text{wobei } K_{II} &= -b_1 \sqrt{2\pi}, \\ a_2 &= -\frac{1}{4}\sigma, & \text{wobei } T &= 4a_2, & b_2 &= \frac{1}{4}\tau, \\ a_3 &= \frac{\sigma}{4\sqrt{2a}}, & & & b_3 &= -\frac{\tau}{4\sqrt{2a}}, \\ a_4 &= 0, & & & b_4 &= 0, \\ a_5 &= -\frac{\sigma}{32a\sqrt{2a}}, & & & b_5 &= \frac{\tau}{32a\sqrt{2a}}, \\ a_6 &= 0, & & & b_6 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

### A.3 WILLIAMS-Koeffizienten der analytischen Lösung bei einer unendlichen Platte mit einem Riss unter allseitiger Biegung und Torsion

Analog zum Kapitel A.2 sollen die Koeffizienten  $a_n, b_n$  in der Gl. (4.6) für den Fall einer unendlichen Platte mit einem Riss der Länge  $2a$  unter allseitigen Biegung (Modus I) und Torsion (Modus II) hergeleitet werden (Bild 49).

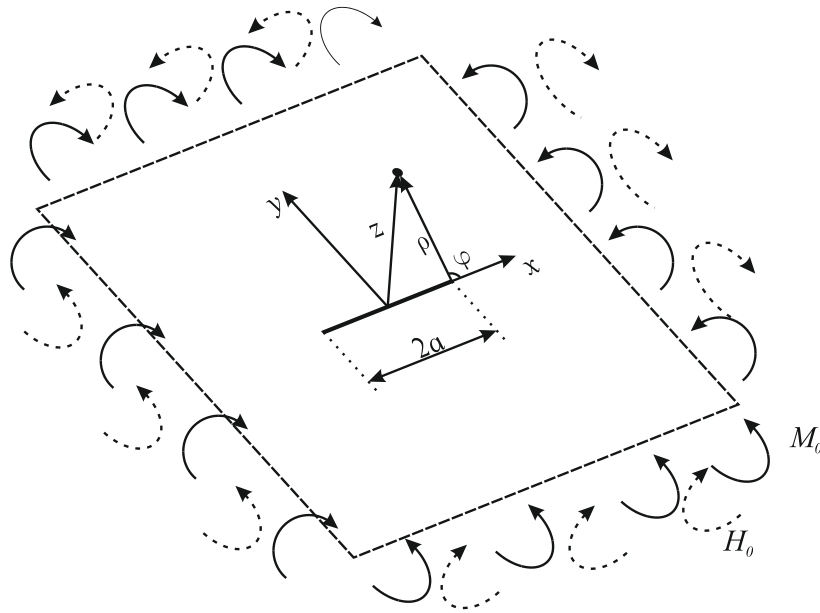


Bild 49: Unendliche Platte mit Riss der Länge  $2a$  unter allseitiger Biegung  $M_0$  und Torsion  $H_0$

Die komplexe Spannungsfunktionen für die beiden Belastungsfälle sind in der Gl. (2.115) und (2.116) gegeben, woraus für die Gl. (2.115):

$$\phi_I'(z) = -\frac{M_0}{2D(1+v)(3+v)} \left[ 2 + (1+v) \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right], \quad (\text{A.10})$$

und für Gl. (2.116):

$$\phi_{II}'(z) = \frac{iH_0}{2D(3+v)} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right], \quad (\text{A.11})$$

folgt. Die Transformation der Funktionen  $\phi_I'(z)$  und  $\phi_{II}'(z)$  auf die Risspitze mit  $z = \rho + a$  ergibt:

$$\begin{aligned} \phi_I'(\rho) &= -\frac{M_0}{2D(3+v)} \left[ \frac{2}{(1+v)} + \frac{\rho + a}{\sqrt{\rho^2 + 2a\rho}} \right], \\ \phi_{II}'(\rho) &= \frac{iH_0}{2D(3+v)} \left[ 1 - \frac{\rho + a}{\sqrt{\rho^2 + 2a\rho}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Schreibt man die Gl. (A.10) und (A.11) mit  $\phi(z) = \phi_I(z) + \phi_{II}(z)$  als Summe der beiden Belastungsmoden auf und transformiert das Ergebnis auf die Risspitze mit  $z = \rho + a$ , so folgt:

$$\phi(\rho) = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{\rho + a}{\sqrt{\rho + 2a}} \cdot \frac{M_0 + iH_0}{2D(3+v)} - \frac{2M_0 - (1+v)iH_0}{2D(1+v)(3+v)}. \quad (\text{A.13})$$

In Verbindung mit der Gl. (A.3) ergibt sich aus der Gl. (A.13):

$$f(\rho) = -\frac{\rho + a}{\sqrt{\rho + 2a}} \cdot \frac{M_0 + iH_0}{2D(3+v)}, \quad g(\rho) = -\frac{2M_0 - (1+v)iH_0}{2D(1+v)(3+v)}. \quad (\text{A.14})$$

Die Bildung der MAC-LAURINSchen Reihe der Funktion  $f(\rho)$  aus Gl. (A.14) liefert ein ähnliches Ergebnis wie für den GRIFFITH-Riss (vgl. Gl. (A.6)), nur mit dem anderen Vorfaktor:

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m^T \rho^m, \\ a_m^T &= (-1)^{m+1} \cdot \frac{a^{0,5-m}}{m! 2^{2m+0,5}} \cdot \frac{2m+1}{2m-1} \cdot \frac{M_0 + iH_0}{2D(3+v)} \cdot \prod_{k=0}^m (2k-1). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Die gesuchten WILLIAMS-Koeffizienten  $a_n$  bzw.  $b_n$  in der Form von Gl. (2.96) ergeben sich schließlich zu:

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= (-1)^{m+1} \cdot \frac{a^{0,5-m}}{m! 2^{2m+0,5}} \cdot \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{M_0}{D(3+v)} \cdot \prod_{k=0}^m (2k-1), \quad a_2 = -\frac{M_0}{D(1+v)(3+v)}, \\ b_{2m+1} &= (-1)^{m+1} \cdot \frac{a^{0,5-m}}{m! 2^{2m+0,5}} \cdot \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{iH_0}{D(3+v)} \cdot \prod_{k=0}^m (2k-1), \quad b_2 = \frac{iH_0}{2D(3+v)}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

mit  $n = 2m + 1, m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Nach der Formel von CAUCHY-HADAMARD Gl. (A.7) lässt sich der Konvergenzradius der Reihe Gl. (A.15) zu:

$$R = 2a, \quad (\text{A.17})$$

berechnen.

Die Koeffizienten mit  $n = 2(m + 1)$  für  $m > 0$  sind wie beim GRIFFITH-Riss ebenfalls null. Die ersten sechs Koeffizienten der Lösung ergeben sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{M_0}{D(3+v)}\sqrt{\frac{a}{2}}, & b_1 &= -\frac{H_0}{D(3+v)}\sqrt{\frac{a}{2}}, \\
 a_2 &= -\frac{M_0}{D(1+v)(3+v)}, & b_2 &= \frac{H_0}{2D(3+v)}, \\
 a_3 &= -\frac{1}{4\sqrt{2a}}\frac{M_0}{D(3+v)}, & b_3 &= -\frac{1}{4\sqrt{2a}}\frac{H_0}{D(3+v)}, \\
 a_4 &= 0, & b_4 &= 0, \\
 a_5 &= \frac{1}{32a\sqrt{2a}}\frac{M_0}{D(3+v)}, & b_5 &= \frac{1}{32a\sqrt{2a}}\frac{H_0}{D(3+v)}, \\
 a_6 &= 0, & b_6 &= 0.
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

#### A.4 Fehlerdiagramme für die Approximation der analytischen Lösung des GRIFFITH-Risses durch die WILLIAMSSche Reihenentwicklung

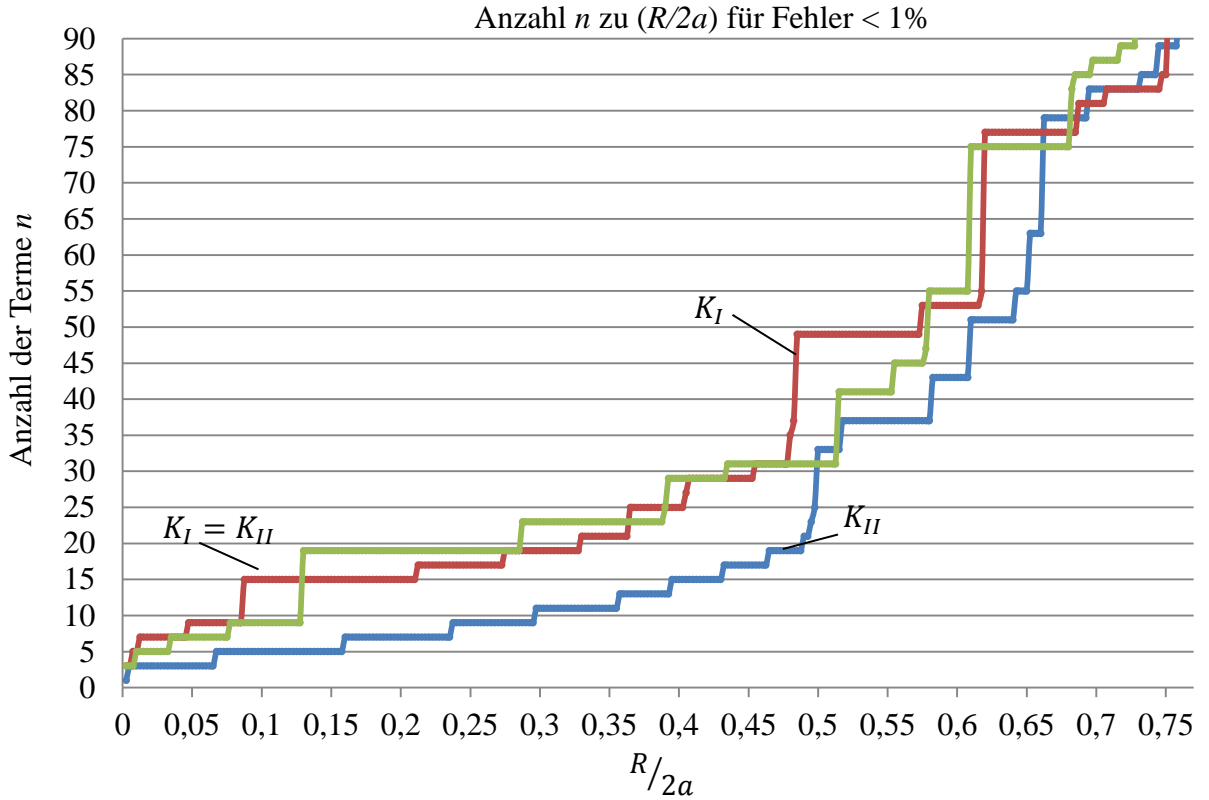


Bild 50: Anzahl der Terme in der WILLIAMS-Reihe über Entfernung zur Rissspitze bei verschiedenen Belastungssituationen ( $K_I$  – reiner Modus I,  $K_{II}$  – reiner Modus II,  $K_I = K_{II}$  – Mixed Modus)

Aus Bild 50 wird deutlich, dass schon in einem Bereich von  $a/2$  bis zu 49 Terme notwendig sind, um in allen drei Fällen unter der Fehlerquote von 1% zu bleiben. Der Fehler vergrößert sich bei weniger Reihentermen entsprechend und ist außerdem stark vom Winkel  $\varphi$  abhängig (Bild 51, Bild 52).

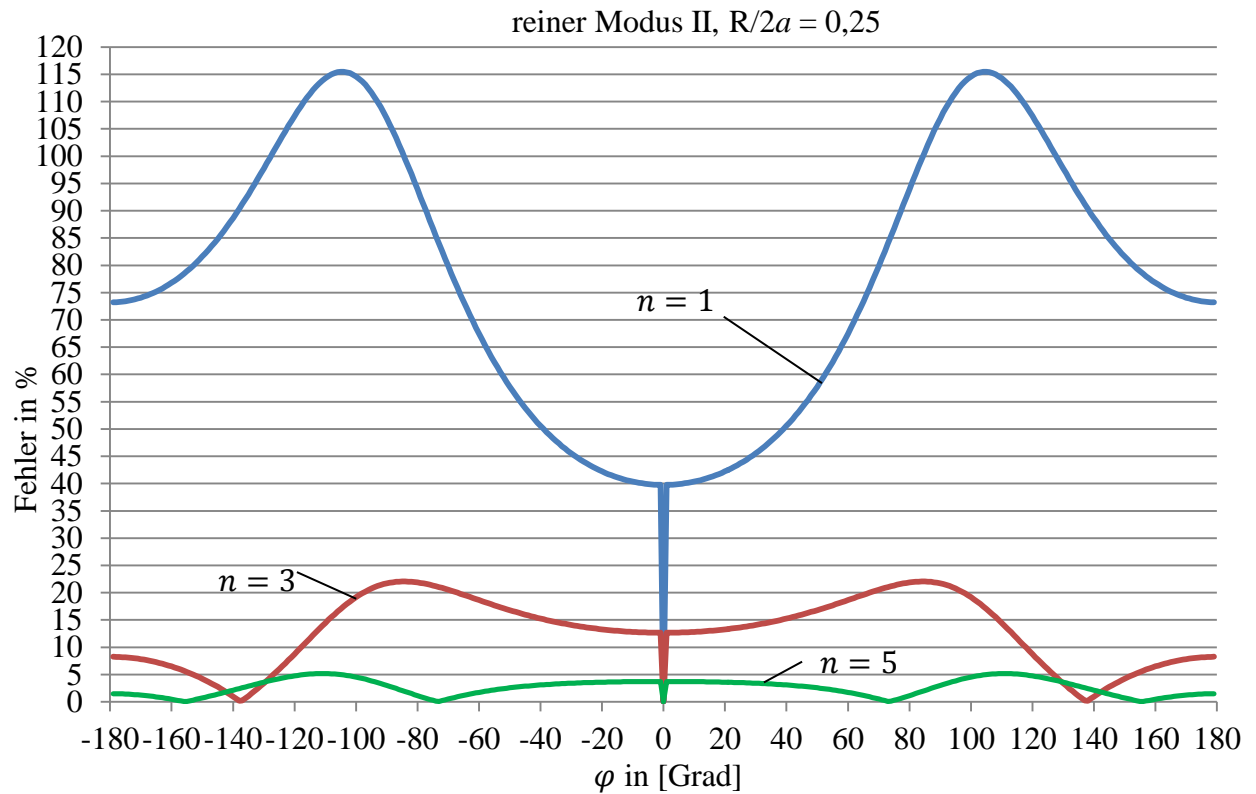


Bild 51: Fehlerverlauf in % bei reinem Modus II im Abstand zur Risspitze von  $\frac{R}{2a} = 0,25$

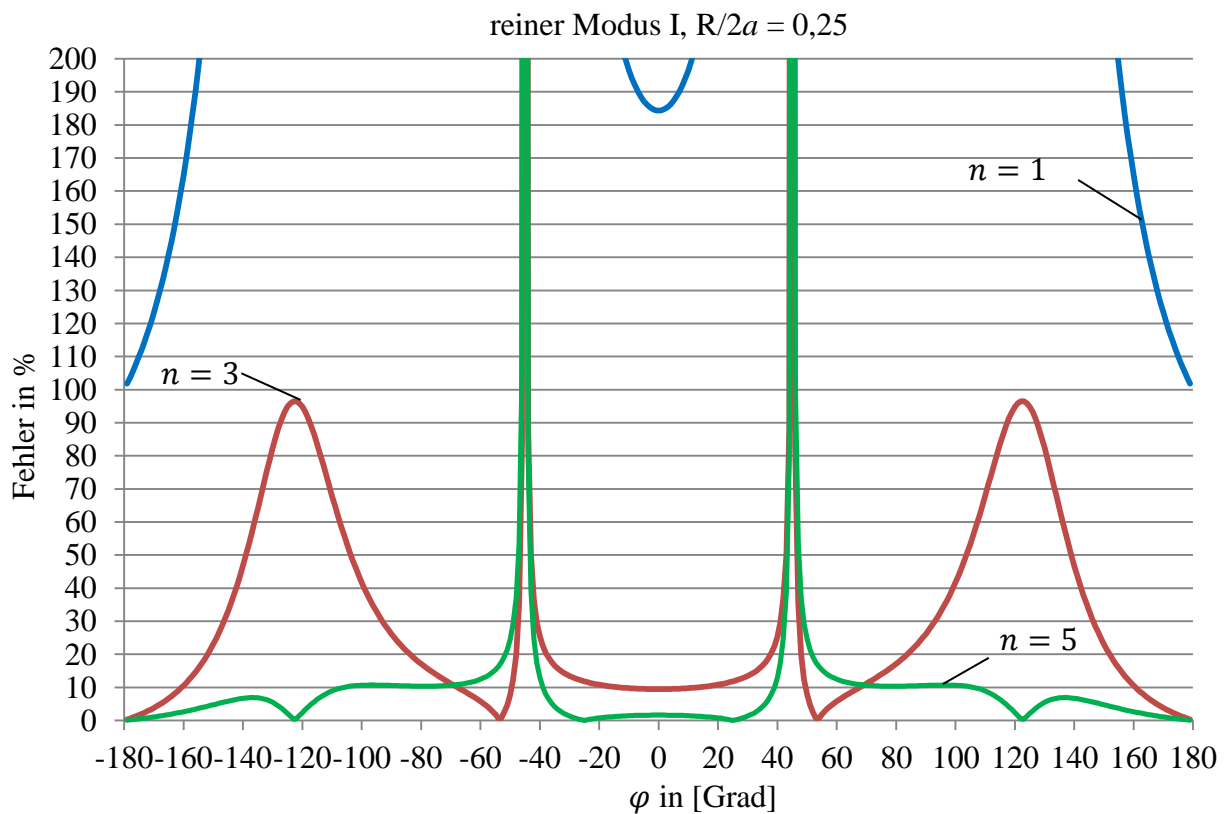


Bild 52: Fehlerverlauf in % bei reinem Modus I im Abstand zur Risspitze von  $\frac{R}{2a} = 0,25$

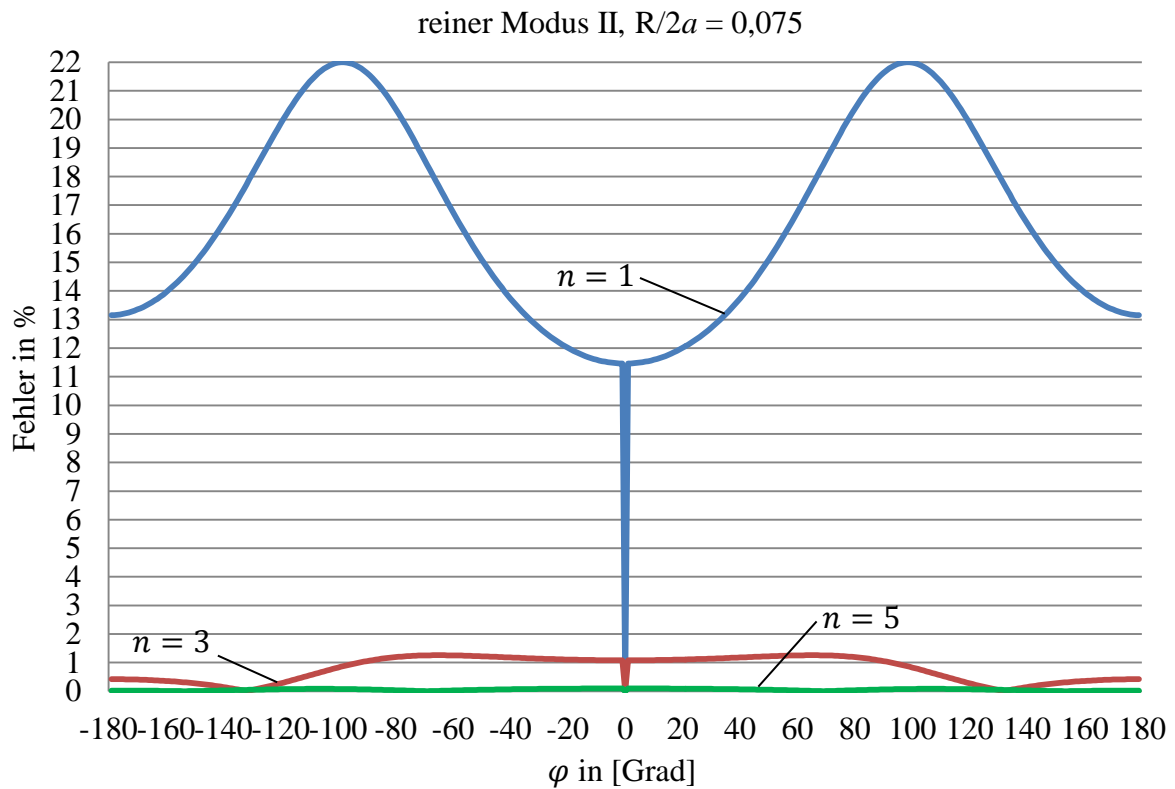


Bild 53: Fehlerverlauf in % bei reinem Modus II und im Abstand  $\frac{R}{2a} = 0,075$  zur Risspitze

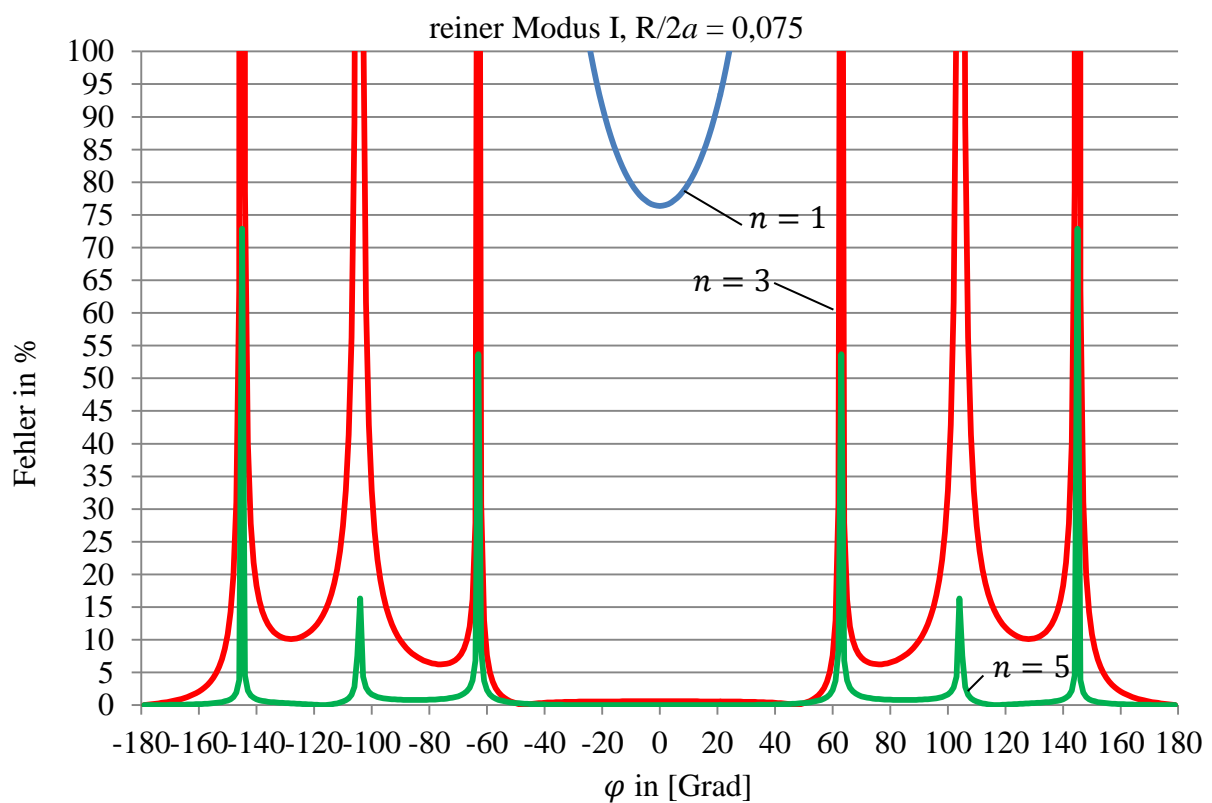


Bild 54: Fehlerverlauf in % bei reinem Modus I und im Abstand  $\frac{R}{2a} = 0,075$  zur Risspitze

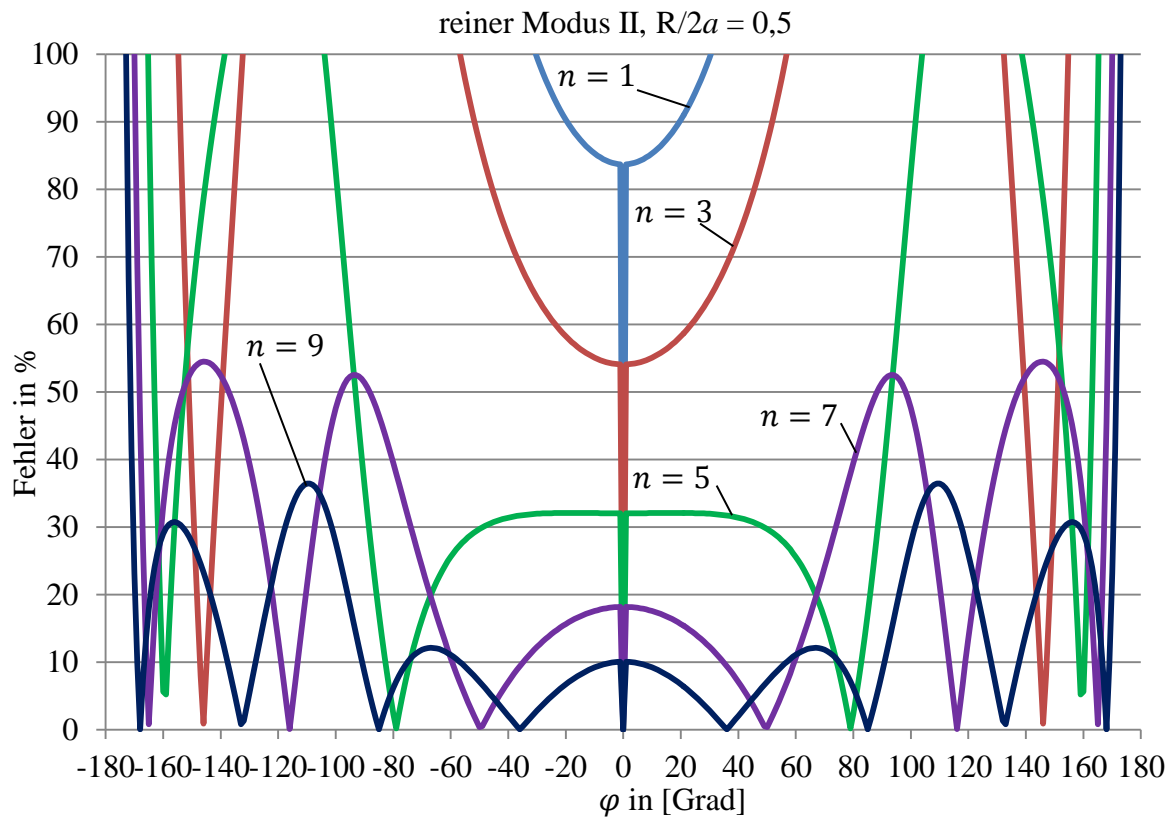


Bild 55: Fehlerverlauf in % bei reinem Modus II und im Abstand  $\frac{R}{2a} = 0,5$  zur Risspitze

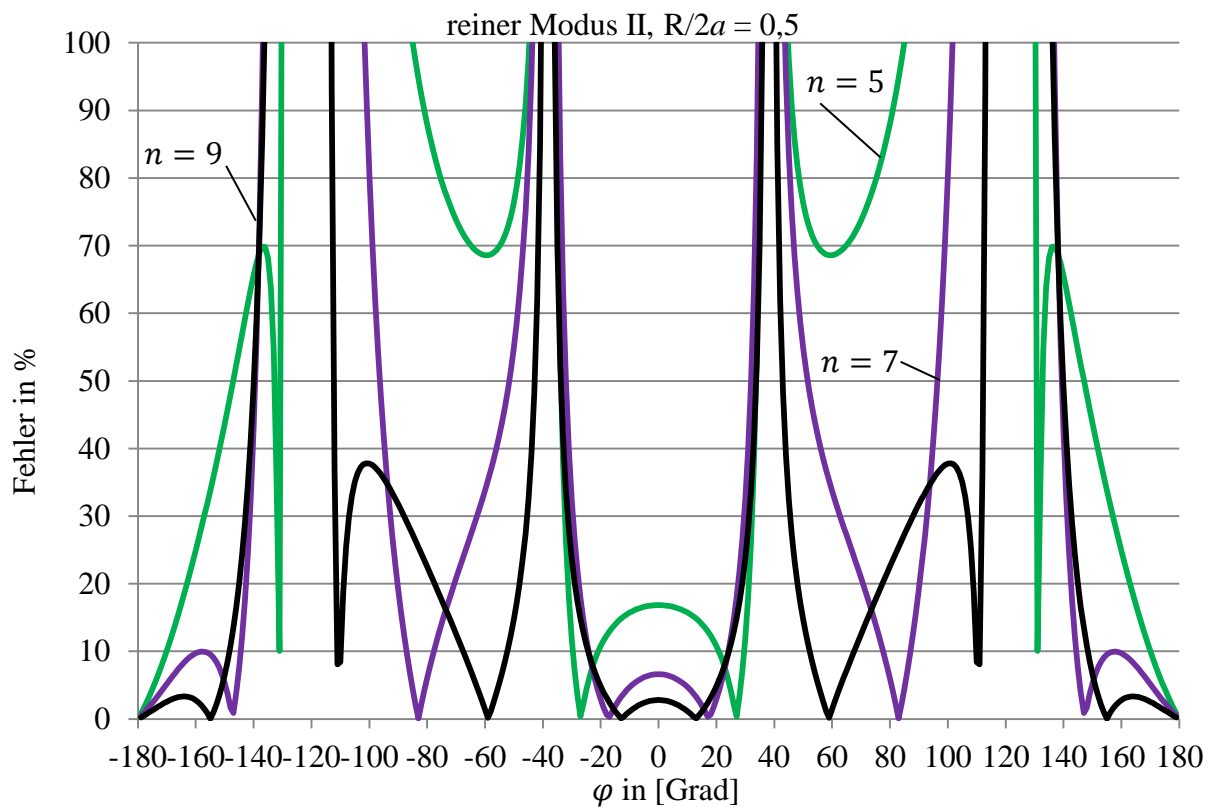


Bild 56: Fehlerverlauf in % bei reinem Modus I und im Abstand  $\frac{R}{2a} = 0,5$  zur Risspitze

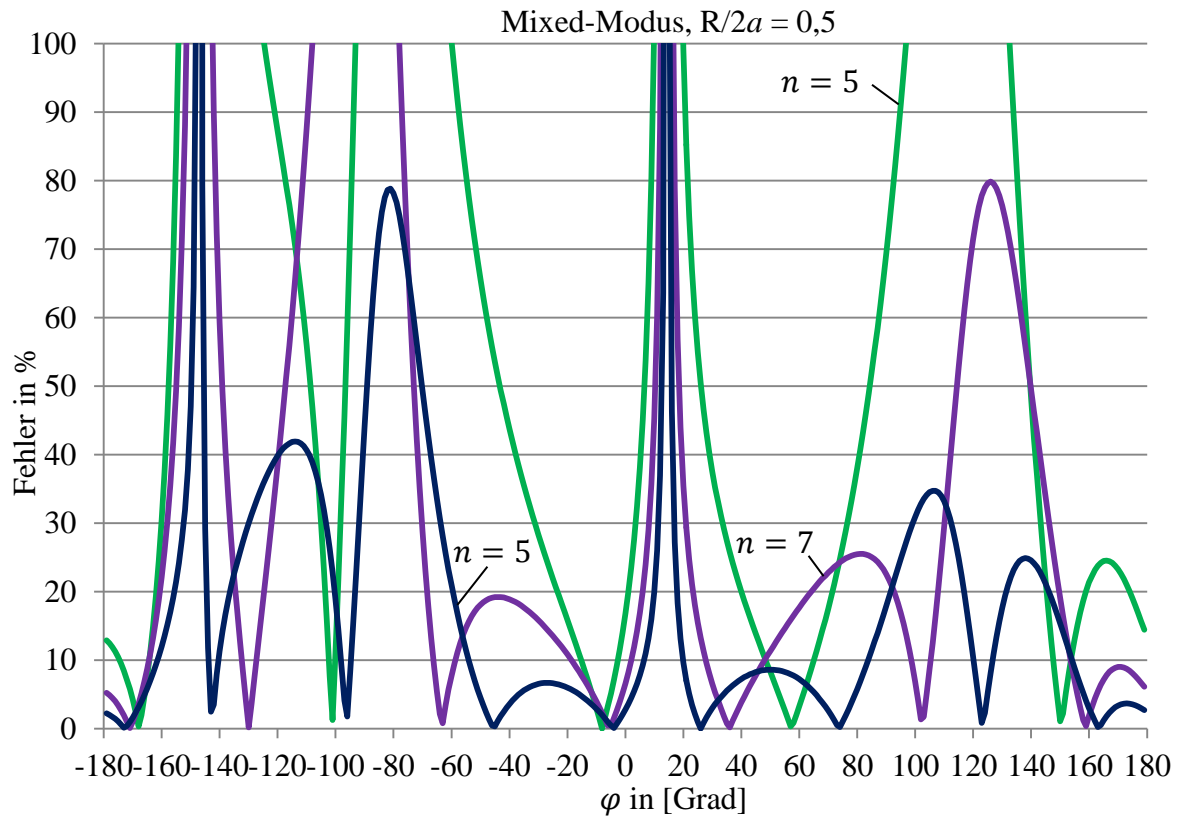


Bild 57: Fehlerverlauf in % bei Mixed-Modus  $K_I = K_{II}$  und im Abstand  $\frac{R}{2a} = 0,5$  zur Rissspitze

## A.5 Rissnahfeldlösung nach der MINDLINSchen Plattentheorie

Es wird vorausgesetzt, dass die Flächenlast  $p(r, \varphi) = 0$  ist. Somit ergibt sich die Gl. (2.127) zu:

$$\Delta\Phi = 0, \quad (\text{A.19})$$

woraus für die Gl. (2.129) folgt:

$$\Phi = -\Delta w. \quad (\text{A.20})$$

Demzufolge liegt die Lösung des Problems in der Erfüllung beider Differentialgleichungen:

$$\Delta\Delta w = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\Delta\Psi - c^2\Psi = 0, \quad (\text{A.22})$$

wobei  $c^2 = \frac{10}{h^2}$  ist.

Die Verdrehungswinkel in den Gl. (2.128) ergeben sich somit zu:

$$\omega_r = -\left(w + \frac{h^2}{5(1-\nu)}\Delta w\right)_{,r} - \frac{h^2}{10r}\Psi_{,\varphi}, \quad \omega_\varphi = -\frac{1}{r}\left(w + \frac{h^2}{5(1-\nu)}\Delta w\right)_{,\varphi} + \frac{h^2}{10}\Psi_{,r}. \quad (\text{A.23})$$

Das Einsetzen der Gl. (A.23) in die Gl. (2.123) liefert schließlich unter Einführung folgender Operatoren:

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \left( \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right), & \Lambda_2 &= \left( v \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right), \\ \Lambda_3 &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), & \Lambda_4 &= \left( \frac{\partial}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right),\end{aligned}\quad (\text{A.24})$$

die Schnittmomente und die Querkräfte:

$$\begin{aligned}m_{rr} &= -D \left( \Lambda_1 w + \frac{h^2}{5(1-v)} \Lambda_1 \Delta w + \frac{(1-v)h^2}{10} \Lambda_3 \Psi \right), & q_r &= -D \left( (\Delta w)_{,r} + \frac{(1-v)}{2r} \Psi_{,\varphi} \right), \\ m_{\varphi\varphi} &= -D \left( \Lambda_2 w + \frac{h^2}{5(1-v)} \Lambda_2 \Delta w - \frac{(1-v)h^2}{10} \Lambda_3 \Psi \right), & q_\varphi &= -D \left( \frac{1}{r} (\Delta w)_{,\varphi} - \frac{(1-v)}{2} \Psi_{,r} \right), \\ m_{r\varphi} &= -(1-v)D \left( \Lambda_3 \left( w + \frac{h^2}{5(1-v)} \Delta w \right) - \frac{h^2}{20} \Lambda_4 \Psi \right),\end{aligned}\quad (\text{A.25})$$

Die Durchbiegungsfunktion  $w$  ist eine biharmonische Funktion Gl. (A.21) und kann als eine Summe zweier holomorpher Funktionen dargestellt werden (vgl. Formel von GOURSAT [63]):

$$w(r, \varphi) = \Re[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)], \quad (\text{A.26})$$

mit  $z = re^{i\varphi}$ . Die beiden komplexen Potentiale  $\phi(z)$  und  $\chi(z)$  sind außerhalb des Risses definiert. Mathematisch heißt das, dass die Potentiale holomorph in einer aufgeschlitzten Umgebung von  $z = 0$  sind. Deshalb ist es sinnvoll Ansätze der Form (vgl. Gl. (2.95)):

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{\lambda_n}, \quad \chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{\lambda_n+1}, \quad (\text{A.27})$$

mit  $\lambda_n = n/2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , wobei die Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  komplex sind, zu wählen. Später werden auch die Rechnungen diese Wahl bestätigen.

Die Gl. (A.22) ist eine homogene elliptische partielle Differentialgleichung, genannt HELMHOLTZ Gleichung. Die Lösung der homogenen HELMHOLTZ Gleichung in der Form von Gl. (A.22) lautet in Polarkoordinaten [108]:

$$\Psi(r, \varphi) = \sum_{m_n=j}^{\infty} [X_1 I_{m_n}(cr) + X_2 K_{m_n}(cr)] (X_3 \cos m_n \varphi + X_4 \sin m_n \varphi), \quad (\text{A.28})$$

wobei  $I_{m_n}(cr)$  und  $K_{m_n}(cr)$  modifizierte BESSEL-Funktionen der 1. und 2. Art,  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  beliebige Konstanten sind. Es wird angenommen, dass  $m_n$  eine Funktion von  $\lambda_n$  bzw.  $m_n = m_n(\lambda_n)$  ist und demzufolge kann  $m_n$  auch reelle Werte annehmen (siehe z. B. [64], später wird gezeigt, dass  $m_n = \lambda_n - 1$  und demzufolge  $j = -1/2$  ist). Da die Verdrehungswinkel  $\omega_r$  und  $\omega_\varphi$  an der Risspitze endlich sein müssen, kann nur die modifizierte BESSELsche Funktion 1. Art berücksichtigt werden, da  $K_{m_p}(cr)$  für  $r \rightarrow 0$  unendliche Werte annimmt. Also gilt für die Funktion  $\Psi$  folgender Ansatz in komplexer Form:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}i \sum_{m_n=j}^{\infty} I_{m_n}(cr) (C_{m_n} e^{im_n \varphi} - \overline{C_{m_n}} e^{-im_n \varphi}), \quad (\text{A.29})$$



wobei  $C_{m_n}$  komplexe Koeffizienten sind. Die modifizierte BESSEL-Funktion 1. Art  $I_{m_n}(rc)$  ist wie folgt definiert:

$$I_{m_n}(cr) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{cr}{2}\right)^{2k+m_n}}{\Gamma(k+m_n+1)k!}, \quad (\text{A.30})$$

wobei  $\Gamma$  die Gammafunktion ist.

Für die weitere Berechnung ist es zwingend notwendig, die Funktion  $\Psi$  in der Gl. (A.29) nach Exponenten von  $r$  umzustellen. Die Gl. (A.30) kann in die nachstehende Form:

$$I_{m_n}(cr) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{m_n} r^{2k+m_n}, \quad f(m_n, k) = f_k^{m_n} = \frac{1}{\Gamma(k+m_n+1)k!} \left(\frac{c}{2}\right)^{m_n+2k}, \quad (\text{A.31})$$

umgeschrieben und in die Gl. (A.29) eingesetzt werden. Das Resultat ist nach Exponenten von  $r$  zu sortieren und man erhält:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}i \sum_{m_n=j}^{\infty} r^{m_n} \sum_{k=0}^{k_{\max}} f_k^{m_n-2k} (C_{m_n-2k} e^{i(m_n-2k)\varphi} - \overline{C_{m_n-2k}} e^{-i(m_n-2k)\varphi}). \quad (\text{A.32})$$

Bezüglich der Gl. (A.32) ist folgende Tatsache zu beachten: Legt man fest, dass  $m_n$  ab einem bestimmten Wert  $m_n = j$  anfängt, dann ist die Summe über  $k$  zu jedem  $m_n$  mit  $m_n - 2k \geq j$  bzw. :

$$k_{\max} \leq \frac{m_n - j}{2}, \quad (\text{A.33})$$

entsprechend begrenzt.

Durch das Einsetzen der eingeführten Ansatzfunktionen Gl. (A.27) und Gl. (A.32) in die Gl. (A.25) ergeben sich die Schnittmomente und Querkräfte zu:

$$\begin{aligned} m_{rr} = & -\frac{D}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\lambda_n (1-v) + 1 + 3v) r^{\lambda_n-1} (A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} + \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)}) \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (1-v) \lambda_n (\lambda_n + 1) r^{\lambda_n-1} (B_n e^{i\varphi(\lambda_n+1)} + \overline{B_n} e^{-i\varphi(\lambda_n+1)}) \\ & + \frac{4h^2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\lambda_n - 1) (\lambda_n - 2) r^{\lambda_n-3} (A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} + \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)}) \\ & \left. - \frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{m_n=j}^{\infty} r^{m_n-2} \sum_{k=0}^{k_{\max}} (m_n - 2k)(m_n - 1) f_k^{m_n-2k} (C_{m_n-2k} e^{i\varphi(m_n-2k)} + \overline{C_{m_n-2k}} e^{-i\varphi(m_n-2k)}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} m_{\varphi\varphi} = & -\frac{D}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (3 + v - \lambda_n (1-v)) r^{\lambda_n-1} (A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} + \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)}) \right. \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} (1-v) \lambda_n (\lambda_n + 1) r^{\lambda_n-1} (B_n e^{i\varphi(\lambda_n+1)} + \overline{B_n} e^{-i\varphi(\lambda_n+1)}) \\ & - \frac{4h^2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\lambda_n - 1) (\lambda_n - 2) r^{\lambda_n-3} (A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} + \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)}) \\ & \left. + \frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{m_n=j}^{\infty} r^{m_n-2} \sum_{k=0}^{k_{\max}} (m_n - 2k)(m_n - 1) f_k^{m_n-2k} (C_{m_n-2k} e^{i\varphi(m_n-2k)} + \overline{C_{m_n-2k}} e^{-i\varphi(m_n-2k)}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned}
m_{r\varphi} = & -\frac{D}{2}i \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (1-v)\lambda_n(\lambda_n-1)r^{\lambda_n-1} (A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} - \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)}) \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (1-v)\lambda_n(\lambda_n+1)r^{\lambda_n-1} (B_n e^{i\varphi(\lambda_n+1)} - \overline{B_n} e^{-i\varphi(\lambda_n+1)}) \\
& \left. + \frac{4h^2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\lambda_n-1)(\lambda_n-2)r^{\lambda_n-3} (A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} - \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)}) \right\}
\end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{m_n=j}^{\infty} r^{m_n-2} \sum_{k=0}^{k_{\max}} (m_n^2 - m_n + 2k^2 - 2km_n) f_k^{m_n-2k} (C_{m_n-2k} e^{i\varphi(m_n-2k)} - \overline{C_{m_n-2k}} e^{-i\varphi(m_n-2k)}) \Bigg\} \\
q_r = & -\frac{D}{2} \left\{ 4 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\lambda_n-1)r^{\lambda_n-2} (A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} + \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)}) \right. \\
& \left. - \frac{1-v}{2} \sum_{m_n=j}^{\infty} r^{m_n-1} \sum_{k=0}^{k_{\max}} (m_n-2k) f_k^{m_n-2k} (C_{m_n-2k} e^{i\varphi(m_n-2k)} + \overline{C_{m_n-2k}} e^{-i\varphi(m_n-2k)}) \right\},
\end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}
q_{\varphi} = & -\frac{D}{2}i \left\{ 4 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\lambda_n-1)r^{\lambda_n-2} (A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} - \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)}) \right. \\
& \left. - \frac{1-v}{2} \sum_{m_n=j}^{\infty} m_n r^{m_n-1} \sum_{k=0}^{k_{\max}} f_k^{m_n-2k} (C_{m_n-2k} e^{i\varphi(m_n-2k)} - \overline{C_{m_n-2k}} e^{-i\varphi(m_n-2k)}) \right\}.
\end{aligned} \tag{A.38}$$

Auch für die Durchbiegung  $w$  und die Drehwinkel der Plattenquerschnitte  $\omega_r$  und  $\omega_{\varphi}$  folgt durch das Einsetzen der Gl. (A.27) und Gl. (A.32) in die Gl. (A.26) und Gl. (A.23):

$$\begin{aligned}
w = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n+1} \{ A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} + \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)} + B_n e^{i\varphi(\lambda_n+1)} + \overline{B_n} e^{-i\varphi(\lambda_n+1)} \}, \\
\omega_r = & -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( (\lambda_n+1)r^{\lambda_n} (A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} + \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)} + B_n e^{i\varphi(\lambda_n+1)} + \overline{B_n} e^{-i\varphi(\lambda_n+1)}) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{4h^2}{5(1-v)} r^{\lambda_n-2} \lambda_n(\lambda_n-1) (A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} + \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)}) \right) \right. \\
& \left. - \frac{h^2}{10} \sum_{m_n=j}^{\infty} r^{m_n-1} \sum_{k=0}^{k_{\max}} (m_n-2k) f_k^{m_n-2k} (C_{m_n-2k} e^{i\varphi(m_n-2k)} + \overline{C_{m_n-2k}} e^{-i\varphi(m_n-2k)}) \right\}, \tag{A.39} \\
\omega_{\varphi} = & -\frac{1}{2}i \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( r^{\lambda_n} ((\lambda_n-1)(A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} - \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)}) + (\lambda_n+1)(B_n e^{i\varphi(\lambda_n+1)} - \overline{B_n} e^{-i\varphi(\lambda_n+1)})) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{4h^2}{5(1-v)} r^{\lambda_n-2} \lambda_n(\lambda_n-1) (A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} - \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)}) \right) \right. \\
& \left. - \frac{h^2}{10} \sum_{m_n=j}^{\infty} r^{m_n-1} m_n \sum_{k=0}^{k_{\max}} f_k^{m_n-2k} (C_{m_n-2k} e^{i\varphi(m_n-2k)} - \overline{C_{m_n-2k}} e^{-i\varphi(m_n-2k)}) \right\}.
\end{aligned}$$

Das System partieller Differentialgleichungen vierter Ordnung (Gl. (A.21) und (A.22)) erlaubt für jeden Rand das Vorschreiben von drei Randbedingungen auf den Rissflanken. Für das vorliegende Problem können an den lastfreien Rissufern  $\varphi = \pm\pi$  genau drei Randbedingungen definiert werden:

$$m_{\varphi\varphi}|_{\pm\pi} = 0, \quad m_{r\varphi}|_{\pm\pi} = 0, \quad q_{\varphi}|_{\pm\pi} = 0. \tag{A.40}$$

Durch die Anwendung der drei Randbedingungen (Gl. (A.40)) können die Schnittmomente und Querkräfte (Gl. (A.25)) durch die Ansatzfunktionen dargestellt werden.

- Randbedingung  $q_\varphi|_{\pm\pi} = 0$

Als erster Schritt soll die Querkraft  $q_\varphi$  an den Rissflanken ausgewertet werden. Die Beziehung für die Querkraft  $q_\varphi$  aus der Gl. (A.25) liefert somit:

$$\frac{1}{r}(\Delta w)_{,\varphi} = \frac{1-v}{2}\Psi_{,r}|_{\pm\pi}, \quad (\text{A.41})$$

bzw. ergibt sich für die Gl. (A.38) mit  $\varphi = \pi$ :

$$\begin{aligned} & -\frac{8}{1-v} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\lambda_n - 1) r^{\lambda_n-2} (A_n e^{i\pi\lambda_n} - \overline{A_n} e^{-i\pi\lambda_n}) = \\ & \sum_{m_n=j}^{\infty} m_n r^{m_n-1} \sum_{k=0}^{k_{\max}} f_k^{m_n-2k} (C_{m_n-2k} e^{i\pi m_n} - \overline{C_{m_n-2k}} e^{-i\pi m_n}). \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Um eine Beziehung zwischen den Koeffizienten  $A_n$  und  $C_{m_n}$  herzustellen, ist es notwendig, für die linke und die rechte Seite der Gleichung einen Exponentenvergleich durchzuführen, woraus folgt, dass:

$$m_n = \lambda_n - 1, \quad (\text{A.43})$$

ist. In Verbindung mit den Werten von  $\lambda_n$  erhält man, dass  $m_n = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$  und  $j = -\frac{1}{2}$  ist. Auf diese Beziehung wurde schon nach Einführung von  $\lambda_n = n/2$  hingewiesen.

Damit erhält man aus der Gl. (A.42) eine Beziehung zwischen den Konstanten  $A_n$  und  $C_{m_n}$ :

$$\frac{8}{1-v} \lambda_n A_n = \sum_{k=0}^{k_{\max}} f_k^{\lambda_n-2k-1} C_{\lambda_n-2k-1}. \quad (\text{A.44})$$

Die weitere Auswertung der Gl. (A.44) benötigt der Bestätigung der gemachten Annahme bezüglich  $\lambda_n$ .

- Randbedingung  $m_\varphi|_{\pm\pi} = 0, \quad m_{r\varphi}|_{\pm\pi} = 0$

Die Randbedingungen bezüglich der Schnittmomente  $m_\varphi$  und  $m_{r\varphi}$  lassen sich durch Komplexifizierung  $m_\varphi + im_{r\varphi}$  handlicher auswerten. Aus den Gl. (A.35) und (A.36) ergibt sich durch die Addition:

$$\begin{aligned}
m_{\varphi\varphi} + im_{r\varphi} = D \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r^{\lambda_n-1} \left( (\lambda_n(1-v) - 2) A_n e^{i\varphi(\lambda_n-1)} - (1+v) \overline{A_n} e^{-i\varphi(\lambda_n-1)} \right) \right. \\
+ (1-v) \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{\lambda_n-1} e^{i\varphi(\lambda_n+1)} \lambda_n (\lambda_n + 1) + \frac{4h^2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\lambda_n-3} e^{i\varphi(\lambda_n-1)} \lambda_n (\lambda_n - 1) (\lambda_n - 2) \\
- \frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{m=j}^{\infty} r^{m-2} \sum_{k=0}^{k_{max}} f_k^{m-2k} C_{m_n-2k} e^{i\varphi(m-2k)} (m_n(m_n - 1) + k(k - 2m_n + 1)) \\
\left. + \frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{m_n=j}^{\infty} r^{m-2} \sum_{k=0}^{k_{max}} f_k^{m_n-2k} \overline{C_{m_n-2k}} e^{-i\varphi(m_n-2k)} k(k - 1) \right\}. \quad (A.45)
\end{aligned}$$

Die Auswertung der Gl. (A.45) an den Rissflanken  $\varphi = \pm\pi$  unter Einbeziehung der Gl. (A.43) liefert ein homogenes System von zwei komplexen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
m_{\varphi\varphi} + im_{r\varphi}|_{+\pi} = D \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r^{\lambda_n-1} (A_n (\lambda_n(1-v) - 2) e^{i\pi\lambda_n} - \overline{A_n} (1+v) e^{-i\pi\lambda_n}) \right. \\
+ (1-v) \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{\lambda_n-1} e^{i\pi\lambda_n} \lambda_n (\lambda_n + 1) + \frac{4h^2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\lambda_n-3} e^{i\pi\lambda_n} \lambda_n (\lambda_n - 1) (\lambda_n - 2) \\
- \frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-3} e^{i\pi\lambda_n} \sum_{k=0}^{k_{max}} f_k^{\lambda_n-2k-1} C_{\lambda_n-2k-1} ((\lambda_n - 1)(\lambda_n - 2) + k(k - 2\lambda_n + 3)) \\
\left. + \frac{(1-v)h^2}{10} \sum_n r^{\lambda_n-3} e^{-i\pi\lambda_n} \sum_{k=0}^{k_{max}} f_k^{\lambda_n-2k-1} \overline{C_{\lambda_n-2k-1}} k(k - 1) \right\} = 0, \quad (A.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{\varphi\varphi} + im_{r\varphi}|_{-\pi} = D \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r^{\lambda_n-1} (A_n (\lambda_n(1-v) - 2) e^{-i\pi\lambda_n} - \overline{A_n} (1+v) e^{i\pi\lambda_n}) \right. \\
+ (1-v) \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{\lambda_n-1} e^{-i\pi\lambda_n} \lambda_n (\lambda_n + 1) + \frac{4h^2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\lambda_n-3} e^{-i\pi\lambda_n} \lambda_n (\lambda_n - 1) (\lambda_n - 2) \\
- \frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-3} e^{-i\pi\lambda_n} \sum_{k=0}^{k_{max}} f_k^{\lambda_n-2k-1} C_{\lambda_n-2k-1} ((\lambda_n - 1)(\lambda_n - 2) + k(k - 2\lambda_n + 3)) \\
\left. + \frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-3} e^{i\pi\lambda_n} \sum_{k=0}^{k_{max}} f_k^{\lambda_n-2k-1} \overline{C_{\lambda_n-2k-1}} k(k - 1) \right\} = 0. \quad (A.47)
\end{aligned}$$

Durch das Multiplizieren der Gl. (A.47) mit  $e^{2i\pi\lambda_n}$  und der Subtraktion des Resultats von der Gl. (A.46), erhält man eine Gleichung, deren Lösung auf die folgende Beziehung führt:

$$1 - e^{4i\pi\lambda_n} = 0. \quad (A.48)$$

Die Lösung der Gl. (A.48) ergibt schließlich die reellen Eigenwerte:

$$\lambda_n = \frac{n}{2}, \quad (A.49)$$

mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  Dies bestätigt, dass der Ansatz Gl. (A.27) berechtigt ist.

Für die Gl. (A.33) unter Beachtung der Gl. (A.43) folgt somit:

$$l_n = k_{max} \leq \frac{n - 2 - 2j}{4}, \quad (A.50)$$

wobei zu beachten ist, dass bei  $n = 2j + 2 + 4t$  bis  $n = 2j + 5 + 4t$  für Werte von  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$   $l_n = \text{const}$  bleibt (z. B. wenn  $j = -1/2$  ist, dann für  $t = 0$  bzw.  $n = 1 \dots 4$  ist  $l_n = 0$ , für  $t = 1$  bzw.  $n = 5 \dots 8$  ist  $l_n = 1$  usw. ).

Schließlich lässt sich der komplexe Koeffizient  $B_n$  aus der Gl. (A.46) bestimmen. Da stets über das gleiche  $n$  summiert wird, soll das Summationszeichen weggelassen werden:

$$\begin{aligned}
 (1-v)\lambda_n(\lambda_n+1)B_nr^{\lambda_n-1} &= \lambda_n(2-\lambda_n(1-v))r^{\lambda_n-1}A_n + (-1)^n(1+v)\lambda_n\overline{A_n}r^{\lambda_n-1} \\
 &\quad - \frac{4h^2}{5}\lambda_n(\lambda_n-1)(\lambda_n-2)A_nr^{\lambda_n-3} \\
 &\quad + \frac{(1-v)h^2}{10}r^{\lambda_n-3}\sum_{k=0}^{l_n}f_k^{\lambda_n-2k-1}((\lambda_n-1)(\lambda_n-2)+k(k-2\lambda_n+3))C_{\lambda_n-2k-1} \\
 &\quad - (-1)^n\frac{(1-v)h^2}{10}r^{\lambda_n-3}\sum_{k=0}^{l_n}f_k^{\lambda_n-2k-1}k(k-1)\overline{C_{\lambda_n-2k-1}}.
 \end{aligned} \tag{A.51}$$

Durch die Darstellung der Gl. (A.44) in folgender Form:

$$A_n = \frac{1-v}{8\lambda_n}\sum_{k=1}^{l_n}f_k^{\lambda_n-2k-1}C_{\lambda_n-2k-1}, \tag{A.52}$$

wobei  $\lambda_n \neq 0$  ist und das Einsetzen der Beziehung (A.52) in die Gl. (A.51) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 (1-v)\lambda_n(\lambda_n+1)B_nr^{\lambda_n-1} &= \frac{1-v}{8}\sum_{k=0}^{l_n}\left\{(2-\lambda_n(1-v))r^{\lambda_n-1}f_k^{\lambda_n-2k-1}C_{\lambda_n-2k-1}\right. \\
 &\quad \left.+ (-1)^n(1+v)r^{\lambda_n-1}f_k^{\lambda_n-2k-1}\overline{C_{\lambda_n-2k-1}}\right. \\
 &\quad \left.+ \frac{4h^2}{5}r^{\lambda_n-3}f_k^{\lambda_n-2k-1}(C_{\lambda_n-2k-1}k(k-2\lambda_n+3) - (-1)^nk(k-1)\overline{C_{\lambda_n-2k-1}})\right\}.
 \end{aligned} \tag{A.53}$$

Es ist ersichtlich, dass in der Gl. (A.53) die Koeffizienten vor  $r^{\lambda_n-3}$  für  $k = 0$  verschwinden. Nach Gl. (A.50) kann somit für die Koeffizienten vor  $r^{\lambda_n-3}$  ein Austausch von  $k$  durch  $k + 1$ ,  $\lambda_n$  durch  $\lambda_n + 2$  erfolgen und es folgt:

$$\begin{aligned}
 (1-v)\lambda(\lambda+1)B_nr^{\lambda_n-1} &= \frac{1-v}{8}\sum_{k=0}^{l_n}\left\{(2-\lambda_n(1-v))r^{\lambda_n-1}f_k^{\lambda_n-2k-1}C_{\lambda_n-2k-1}\right. \\
 &\quad \left.+ (-1)^n(1+v)r^{\lambda_n-1}f_k^{\lambda_n-2k-1}\overline{C_{\lambda_n-2k-1}}\right. \\
 &\quad \left.+ \frac{4h^2}{5}r^{\lambda_n-1}f_k^{\lambda_n-2k-1}(C_{\lambda_n-2k-1}(k+1)(k-2\lambda_n) - (-1)^nk(k+1)\overline{C_{\lambda_n-2k-1}})\right\}.
 \end{aligned} \tag{A.54}$$

Schließlich kann aus der Gl. (A.54) der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten  $B_n$  und  $C_{\lambda_n-2k-1}$  mit:

$$\frac{4h^2}{5} \cdot \frac{f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1}}{f_k^{\lambda_n-2k-1}} = \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)}, \tag{A.55}$$

hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{1}{8\lambda_n(\lambda_n+1)}\sum_{k=0}^{l_n}f_k^{\lambda_n-2k-1}\{(2-\lambda_n(1-v))C_{\lambda_n-2k-1} + (-1)^n(1+v)\overline{C_{\lambda_n-2k-1}} \\
 &\quad + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)}(C_{\lambda_n-2k-1}(k+1)(k-2\lambda_n) - (-1)^nk(k+1)\overline{C_{\lambda_n-2k-1}})\}.
 \end{aligned} \tag{A.56}$$

Die Durchbiegung  $w$ , die Drehwinkel  $\omega_r$  und  $\omega_\varphi$  müssen an der Rissspitze endlich bleiben. Es muss also zusätzlich Gl. (A.39) ausgewertet werden. Durch das Einsetzen der Gl. (A.43) und Gl. (A.49) in die Gl. (A.39) erhält man die Terme mit  $r^{\frac{n}{2}}$  und  $r^{\frac{n}{2}-2}$ . Unter Beachtung  $\lambda_n \neq 0$  ist  $n_{min} = 1$  für  $r^{\frac{n}{2}}$  und aus  $r^{\frac{n}{2}-2}$  ergibt sich  $n_{min} = 4$ . Wegen  $m_{min} = \frac{n_{min}}{2} - 1$  nimmt die Summe über  $k$  in Gl. (A.32) und die Gl. (A.50) folgende Form an:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}i \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-1} \sum_{k=0}^{l_n} f_k^{\lambda_n-2k-1} (C_{\lambda_n-2k-1} e^{i(\lambda_n-2k-1)\varphi} - \overline{C_{\lambda_n-2k-1}} e^{-i(\lambda_n-2k-1)\varphi}) , \quad (\text{A.57})$$

mit

$$l_n = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor , \quad (\text{A.58})$$

wobei  $\lfloor \cdot \rfloor$  - GAUßsche Klammer und  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  ist.

Die komplexen Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  können nun komplett durch den Koeffizienten  $C_{m_n}$  mit:

$$C_{m_n} = a_{m_n} + ib_{m_n} , \quad (\text{A.59})$$

ausgedrückt werden (vgl. Gl. (A.52) und (A.56)), wobei  $a_{m_n}$  dem Modus I und  $b_{m_n}$  dem Modus II entsprechen.

Somit erhält man für die Durchbiegung  $w$  und die Drehwinkel der Plattenquerschnitte  $\omega_r$  und  $\omega_\varphi$  nach Gl. (A.39) unter Beachtung Gl. (A.55) und (A.58):

$$w = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n+1} \frac{1}{n(\lambda_n+1)} \sum_{k=0}^{l_n} f_k^{\lambda_n-2k-1} \left( a_{\lambda_n-2k-1} \left( F_w^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} R_w^{(n)} \right) + b_{\lambda_n-2k-1} \left( G_w^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} S_w^{(n)} \right) \right) , \quad (\text{A.60})$$

$$F_w^{(n)} = -(1-v)(\lambda_n+1) \cos \varphi (\lambda_n-1) - (2-\lambda_n(1-v) + (-1)^n(1+v)) \cos \varphi (\lambda_n+1) ,$$

$$G_w^{(n)} = (1-v)(\lambda_n+1) \sin \varphi (\lambda_n-1) + (2-\lambda_n(1-v) - (-1)^n(1+v)) \sin \varphi (\lambda_n+1) ,$$

$$R_w^{(n)} = -((k-2\lambda_n - (-1)^n k)(k+1)) \cos \varphi (\lambda_n+1) ,$$

$$S_w^{(n)} = ((k-2\lambda_n + (-1)^n k)(k+1)) \sin \varphi (\lambda_n+1) ,$$

$$\omega_r = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{l_n} f_k^{\lambda_n-2k-1} \left\{ a_{\lambda_n-2k-1} \left( F_{\omega_r}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} R_{\omega_r}^{(n)} \right) + b_{\lambda_n-2k-1} \left( G_{\omega_r}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} S_{\omega_r}^{(n)} \right) \right\} , \quad (\text{A.61})$$

$$F_{\omega_r}^{(n)} = (1-v)(\lambda_n+1) \cos \varphi (\lambda_n-1) + (2-\lambda_n(1-v) + (-1)^n(1+v)) \cos \varphi (\lambda_n+1) ,$$

$$G_{\omega_r}^{(n)} = -(1-v)(\lambda_n+1) \sin \varphi (\lambda_n-1) - (2-\lambda_n(1-v) - (-1)^n(1+v)) \sin \varphi (\lambda_n+1) ,$$

$$R_{\omega_r}^{(n)} = ((k-2\lambda_n - (-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \cos \varphi (\lambda_n+1) - \lambda_n(\lambda_n-2k-1) \cos \varphi (\lambda_n-2k-1) ,$$

$$S_{\omega_r}^{(n)} = -((k-2\lambda_n + (-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \sin \varphi (\lambda_n+1) + \lambda_n(\lambda_n-2k-1) \sin \varphi (\lambda_n-2k-1) ,$$

$$\omega_\varphi = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{l_n} f_k^{\lambda_n-2k-1} \left\{ a_{\lambda_n-2k-1} \left( F_{\omega_\varphi}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} R_{\omega_\varphi}^{(n)} \right) + b_{\lambda_n-2k-1} \left( G_{\omega_\varphi}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} S_{\omega_\varphi}^{(n)} \right) \right\} , \quad (\text{A.62})$$

$$\begin{aligned}
F_{\omega\varphi}^{(n)} &= -(1-v)(\lambda_n-1) \sin \varphi(\lambda_n-1) - (2-\lambda_n(1-v) + (-1)^n(1+v)) \sin \varphi(\lambda_n+1) , \\
G_{\omega\varphi}^{(n)} &= -(1-v)(\lambda_n-1) \cos \varphi(\lambda_n-1) - (2-\lambda_n(1-v) - (-1)^n(1+v)) \cos \varphi(\lambda_n+1) , \\
R_{\omega\varphi}^{(n)} &= -((k-2\lambda_n - (-1)^nk)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \sin \varphi(\lambda_n+1) + \lambda_n(\lambda_n+1) \sin \varphi(\lambda_n-2k-1) , \\
S_{\omega\varphi}^{(n)} &= -((k-2\lambda_n + (-1)^nk)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \cos \varphi(\lambda_n+1) + \lambda_n(\lambda_n+1) \cos \varphi(\lambda_n-2k-1) .
\end{aligned}$$

Für die Schnittmomente  $m_{rr}$ ,  $m_{\varphi\varphi}$ ,  $m_{r\varphi}$  und Querkräfte  $q_r$ ,  $q_\varphi$  ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
m_{rr} = & -\frac{(1-v)}{8} D \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-1} \sum_{k=0}^{l_n} f_k^{\lambda_n-2k-1} \left\{ a_{\lambda_n-2k-1} \left( F_{rr}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} R_{rr}^{(n)} \right) \right. \\
& \left. + b_{\lambda_n-2k-1} \left( G_{rr}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} S_{rr}^{(n)} \right) \right\} , \quad (A.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{rr}^{(n)} &= (\lambda_n(1-v) + 1 + 3v) \cos \varphi(\lambda_n-1) + (2-\lambda_n(1-v) + (-1)^n(1+v)) \cos \varphi(\lambda_n+1) , \\
G_{rr}^{(n)} &= -(\lambda_n(1-v) + 1 + 3v) \sin \varphi(\lambda_n-1) - (2-\lambda_n(1-v) - (-1)^n(1+v)) \sin \varphi(\lambda_n+1) , \\
R_{rr}^{(n)} &= ((k-2\lambda_n - (-1)^nk)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \cos \varphi(\lambda_n+1) - \lambda_n(\lambda_n-2k-1) \cos \varphi(\lambda_n-2k-1) , \\
S_{rr}^{(n)} &= -((k-2\lambda_n + (-1)^nk)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \sin \varphi(\lambda_n+1) + \lambda_n(\lambda_n-2k-1) \sin \varphi(\lambda_n-2k-1) , \\
m_{\varphi\varphi} = & -\frac{(1-v)}{8} D \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-1} \sum_{k=0}^{l_n} f_k^{\lambda_n-2k-1} \left\{ a_{\lambda_n-2k-1} \left( F_{\varphi\varphi}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} R_{\varphi\varphi}^{(n)} \right) \right. \\
& \left. + b_{\lambda_n-2k-1} \left( G_{\varphi\varphi}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} S_{\varphi\varphi}^{(n)} \right) \right\} , \quad (A.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\varphi\varphi}^{(n)} &= -(\lambda_n(1-v) - 3 - v) \cos \varphi(\lambda_n-1) - (2-\lambda_n(1-v) + (-1)^n(1+v)) \cos \varphi(\lambda_n+1) , \\
G_{\varphi\varphi}^{(n)} &= (\lambda_n(1-v) - 3 - v) \sin \varphi(\lambda_n-1) + (2-\lambda_n(1-v) - (-1)^n(1+v)) \sin \varphi(\lambda_n+1) , \\
R_{\varphi\varphi}^{(n)} &= -((k-2\lambda_n - (-1)^nk)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \cos \varphi(\lambda_n+1) + \lambda_n(\lambda_n-2k-1) \cos \varphi(\lambda_n-2k-1) , \\
S_{\varphi\varphi}^{(n)} &= ((k-2\lambda_n + (-1)^nk)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \sin \varphi(\lambda_n+1) - \lambda_n(\lambda_n-2k-1) \sin \varphi(\lambda_n-2k-1) , \\
m_{r\varphi} = & -\frac{(1-v)}{8} D \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-1} \sum_{k=0}^{l_n} f_k^{\lambda_n-2k-1} \left\{ a_{\lambda_n-2k-1} \left( F_{r\varphi}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} R_{r\varphi}^{(n)} \right) \right. \\
& \left. + b_{\lambda_n-2k-1} \left( G_{r\varphi}^{(n)} + \frac{2}{(\lambda_n-k)(k+1)} S_{r\varphi}^{(n)} \right) \right\} , \quad (A.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{r\varphi}^{(n)} &= -(1-v)(\lambda_n-1) \sin \varphi(\lambda_n-1) - (2-\lambda_n(1-v) + (-1)^n(1+v)) \sin \varphi(\lambda_n+1) , \\
G_{r\varphi}^{(n)} &= -(1-v)(\lambda_n-1) \cos \varphi(\lambda_n-1) - (2-\lambda_n(1-v) - (-1)^n(1+v)) \cos \varphi(\lambda_n+1) , \\
R_{r\varphi}^{(n)} &= -((k-2\lambda_n - (-1)^nk)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \sin \varphi(\lambda_n+1) \\
& \quad + (\lambda_n(\lambda_n-1) + 2k(k-\lambda_n+1)) \sin \varphi(\lambda_n-2k-1) , \\
S_{r\varphi}^{(n)} &= -((k-2\lambda_n + (-1)^nk)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \cos \varphi(\lambda_n+1) \\
& \quad + (\lambda_n(\lambda_n-1) + 2k(k-\lambda_n+1)) \cos \varphi(\lambda_n-2k-1) ,
\end{aligned}$$

$$q_r = -\frac{(1-v)D}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n} \sum_{k=0}^{l_n} f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1} \left\{ a_{\lambda_n-2k-1} F_r^{(n)} + b_{\lambda_n-2k-1} G_r^{(n)} \right\} , \quad (A.66)$$

$$\begin{aligned}
F_r^{(n)} &= (\lambda_n+1) \cos \varphi(\lambda_n+1) - (\lambda_n-2k-1) \cos \varphi(\lambda_n-2k-1) , \\
G_r^{(n)} &= -(\lambda_n+1) \sin \varphi(\lambda_n+1) + (\lambda_n-2k-1) \sin \varphi(\lambda_n-2k-1) , \\
q_\varphi = & \frac{(1-v)D}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n} \sum_{k=0}^{l_n} f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1} \left\{ a_{\lambda_n-2k-1} F_\varphi^{(n)} + b_{\lambda_n-2k-1} G_\varphi^{(n)} \right\} , \quad (A.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\varphi^{(n)} &= (\lambda_n+1) \sin \varphi(\lambda_n+1) - (\lambda_n+1) \sin \varphi(\lambda_n-2k-1) , \\
G_\varphi^{(n)} &= (\lambda_n+1) \cos \varphi(\lambda_n+1) - (\lambda_n+1) \cos \varphi(\lambda_n-2k-1) .
\end{aligned}$$

Die ersten zwei Terme ( $n = 1, 2$ ) ergeben sich somit zu:

$$w^{(1)} = \frac{(1-v)}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{h}{\pi\sqrt{10}}} r^{\frac{3}{2}} \left( a_{-\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{(7+v)}{3(1-v)} \cos \frac{3\varphi}{2} \right) + b_{-\frac{1}{2}} \left( \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \right), \quad (\text{A.68})$$

$$w^{(2)} = \frac{1}{4} r^2 ((1-v)a_0 \sin^2 \varphi - b_0 \sin 2\varphi),$$

$$\omega_\varphi^{(1)} = \frac{(1+v)}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{h}{\pi\sqrt{10}}} r^{\frac{1}{2}} \left( a_{-\frac{1}{2}} \left( \frac{(7-v)}{(1+v)} \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{3\varphi}{2} \right) - b_{-\frac{1}{2}} \left( \frac{(7-v)}{(1+v)} \cos \frac{\varphi}{2} - 3 \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \right), \quad (\text{A.69})$$

$$\omega_\varphi^{(2)} = \frac{1}{4} r ((1+v)a_0 \sin 2\varphi - 2b_0),$$

$$m_{rr}^{(1)} = -\frac{(1-v^2)}{8\sqrt{2}} D \sqrt{\frac{h}{\pi\sqrt{10}}} r^{-\frac{1}{2}} \left( a_{-\frac{1}{2}} \left( 5 \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{3\varphi}{2} \right) + b_{-\frac{1}{2}} \left( 5 \sin \frac{\varphi}{2} - 3 \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \right), \quad (\text{A.70})$$

$$m_{rr}^{(2)} = -\frac{(1-v^2)}{2} D a_0 \cos^2 \varphi,$$

$$m_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{(1-v^2)}{8\sqrt{2}} D \sqrt{\frac{h}{\pi\sqrt{10}}} r^{-\frac{1}{2}} \left( a_{-\frac{1}{2}} \left( 3 \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} \right) + b_{-\frac{1}{2}} \left( 3 \sin \frac{\varphi}{2} + 3 \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \right), \quad (\text{A.71})$$

$$m_{\varphi\varphi}^{(2)} = -\frac{(1-v^2)}{2} D a_0 \sin^2 \varphi,$$

$$m_{r\varphi}^{(1)} = -\frac{(1-v^2)}{8\sqrt{2}} D \sqrt{\frac{h}{\pi\sqrt{10}}} r^{-\frac{1}{2}} \left( a_{-\frac{1}{2}} \left( \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} \right) - b_{-\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + 3 \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \right), \quad (\text{A.72})$$

$$m_{r\varphi}^{(2)} = \frac{(1-v^2)}{4} D a_0 \sin 2\varphi,$$

$$q_r^{(1)} = -\frac{(1-v)}{16\sqrt{2}} D \sqrt{\frac{10\sqrt{10}}{\pi h^3}} r^{\frac{1}{2}} \left( a_{-\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + 3 \cos \frac{3\varphi}{2} \right) + b_{-\frac{1}{2}} \left( \sin \frac{\varphi}{2} - 3 \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \right), \quad (\text{A.73})$$

$$q_r^{(2)} = -\frac{5(1-v)}{8h^2} D r (a_0 \cos 2\varphi - b_0 \sin 2\varphi),$$

$$q_\varphi^{(1)} = \frac{(1-v)}{16\sqrt{2}} D \sqrt{\frac{10\sqrt{10}}{\pi h^3}} r^{\frac{1}{2}} \left( a_{-\frac{1}{2}} \left( 3 \sin \frac{\varphi}{2} + 3 \sin \frac{3\varphi}{2} \right) - b_{-\frac{1}{2}} \left( 3 \cos \frac{\varphi}{2} - 3 \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \right), \quad (\text{A.74})$$

$$q_\varphi^{(2)} = \frac{5(1-v)}{8h^2} D r (a_0 \sin 2\varphi - 2b_0 \sin^2 \varphi).$$

Aus der Gl. (A.73) und (A.74) sieht man, dass für  $r \rightarrow 0$  die Querkräfte endliche Werte annehmen (vgl. [97]).

Drückt man die komplexen Koeffizienten  $B_n$  und  $C_m$  durch den Koeffizienten  $A_n$  mit  $A_n = a_n + ib_n$  aus, wobei der Koeffizient  $C_{m_n} = p_{m_n} + iq_{m_n}$  nach Gl. (A.44) erst rekursiv berechnet werden soll, dann ergeben sich die Schnittmomente, Querkräfte, Durchbiegung und Drehwinkel zu:

$$w = -\frac{1}{(1-v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n(\lambda_n+1)} r^{\lambda_n+1} \left( a_n (F_w^{(n)} + R_w^{(n)}) + b_n (G_w^{(n)} + S_w^{(n)}) \right), \quad (\text{A.75})$$

$$F_w^{(n)} = -(1-v)\lambda_n(\lambda_n+1) \cos \varphi(\lambda_n-1) - \lambda_n(2-\lambda_n(1-v) + (-1)^n(1+v)) \cos \varphi(\lambda_n+1),$$

$$G_w^{(n)} = (1-v)\lambda_n(\lambda_n+1) \sin \varphi(\lambda_n-1) + \lambda_n(2-\lambda_n(1-v) - (-1)^n(1+v)) \sin \varphi(\lambda_n+1),$$

$$R_w^{(n)} = -\frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{k=0}^{l_n} p_{\lambda_n-2k-1} f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1} (k-2\lambda_n - (-1)^n k)(k+1) \cos \varphi(\lambda_n+1),$$

$$S_w^{(n)} = \frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{k=0}^{l_n} q_{\lambda_n-2k-1} f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1} (k-2\lambda_n + (-1)^n k)(k+1) \sin \varphi(\lambda_n+1),$$



$$\omega_r = -\frac{1}{(1-v)} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n} \frac{1}{\lambda_n} \left\{ a_n (F_{\omega_r}^{(n)} + R_{\omega_r}^{(n)}) + b_n (G_{\omega_r}^{(n)} + S_{\omega_r}^{(n)}) \right\}, \quad (\text{A.76})$$

$$\begin{aligned} F_{\omega_r}^{(n)} &= (1-v)\lambda_n(\lambda_n+1) \cos \varphi(\lambda_n-1) + \lambda_n(2-\lambda_n(1-v) + (-1)^n(1+v)) \cos \varphi(\lambda_n+1), \\ G_{\omega_r}^{(n)} &= -(1-v)\lambda_n(\lambda_n+1) \sin \varphi(\lambda_n-1) - \lambda_n(2-\lambda_n(1-v) - (-1)^n(1+v)) \sin \varphi(\lambda_n+1), \\ R_{\omega_r}^{(n)} &= \frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{k=0}^{l_n} p_{\lambda_n-2k-1} f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1} \{ ((k-2\lambda_n-(-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \cos \varphi(\lambda_n+1) \\ &\quad - \lambda_n(\lambda_n-2k-1) \cos \varphi(\lambda_n-2k-1) \}, \\ S_{\omega_r}^{(n)} &= -\frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{k=0}^{l_n} q_{\lambda_n-2k-1} f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1} \{ ((k-2\lambda_n+(-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \sin \varphi(\lambda_n+1) \\ &\quad - \lambda_n(\lambda_n-2k-1) \sin \varphi(\lambda_n-2k-1) \}, \\ \omega_\varphi &= -\frac{1}{(1-v)} \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n} \frac{1}{\lambda_n} \left\{ a_n (F_{\omega_\varphi}^{(n)} + R_{\omega_\varphi}^{(n)}) + b_n (G_{\omega_\varphi}^{(n)} + S_{\omega_\varphi}^{(n)}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

$$\begin{aligned} F_{\omega_\varphi}^{(n)} &= -(1-v)\lambda_n(\lambda_n-1) \sin \varphi(\lambda_n-1) - \lambda_n(2-\lambda_n(1-v) + (-1)^n(1+v)) \sin \varphi(\lambda_n+1), \\ G_{\omega_\varphi}^{(n)} &= -(1-v)\lambda_n(\lambda_n-1) \cos \varphi(\lambda_n-1) - \lambda_n(2-\lambda_n(1-v) - (-1)^n(1+v)) \cos \varphi(\lambda_n+1), \\ R_{\omega_\varphi}^{(n)} &= -\frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{k=0}^{l_n} p_{\lambda_n-2k-1} f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1} \{ ((k-2\lambda_n-(-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \sin \varphi(\lambda_n+1) \\ &\quad - \lambda_n(\lambda_n+1) \sin \varphi(\lambda_n-2k-1) \}, \\ S_{\omega_\varphi}^{(n)} &= -\frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{k=0}^{l_n} q_{\lambda_n-2k-1} f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1} \{ ((k-2\lambda_n+(-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \cos \varphi(\lambda_n+1) \\ &\quad - \lambda_n(\lambda_n+1) \cos \varphi(\lambda_n-2k-1) \}, \\ m_{rr} &= -D \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-1} \left\{ a_n (F_{rr}^{(n)} + R_{rr}^{(n)}) + b_n (G_{rr}^{(n)} + S_{rr}^{(n)}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

$$\begin{aligned} F_{rr}^{(n)} &= \lambda_n(\lambda_n(1-v) + 1 + 3v) \cos \varphi(\lambda_n-1) + \lambda_n(2-\lambda_n(1-v) + (-1)^n(1+v)) \cos \varphi(\lambda_n+1), \\ G_{rr}^{(n)} &= -\lambda_n(\lambda_n(1-v) + 1 + 3v) \sin \varphi(\lambda_n-1) - \lambda_n(2-\lambda_n(1-v) - (-1)^n(1+v)) \sin \varphi(\lambda_n+1), \\ R_{rr}^{(n)} &= \frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{k=0}^{l_n} p_{\lambda_n-2k-1} f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1} \{ ((k-2\lambda_n-(-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \cos \varphi(\lambda_n+1) \\ &\quad - \lambda_n(\lambda_n-2k-1) \cos \varphi(\lambda_n-2k-1) \}, \\ S_{rr}^{(n)} &= -\frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{k=0}^{l_n} q_{\lambda_n-2k-1} f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1} \{ ((k-2\lambda_n+(-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \sin \varphi(\lambda_n+1) \\ &\quad - \lambda_n(\lambda_n-2k-1) \sin \varphi(\lambda_n-2k-1) \}, \\ m_{\varphi\varphi} &= -D \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-1} \left\{ a_n (F_{\varphi\varphi}^{(n)} + R_{\varphi\varphi}^{(n)}) + b_n (G_{\varphi\varphi}^{(n)} + S_{\varphi\varphi}^{(n)}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

$$\begin{aligned} F_{\varphi\varphi}^{(n)} &= -\lambda_n(\lambda_n(1-v) - 3 - v) \cos \varphi(\lambda_n-1) - \lambda_n(2-\lambda_n(1-v) + (-1)^n(1+v)) \cos \varphi(\lambda_n+1), \\ G_{\varphi\varphi}^{(n)} &= \lambda_n(\lambda_n(1-v) - 3 - v) \sin \varphi(\lambda_n-1) + \lambda_n(2-\lambda_n(1-v) - (-1)^n(1+v)) \sin \varphi(\lambda_n+1), \\ R_{\varphi\varphi}^{(n)} &= -\frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{k=0}^{l_n} p_{\lambda_n-2k-1} f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1} \{ ((k-2\lambda_n-(-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \cos \varphi(\lambda_n+1) \\ &\quad - \lambda_n(\lambda_n-2k-1) \cos \varphi(\lambda_n-2k-1) \}, \\ S_{\varphi\varphi}^{(n)} &= \frac{(1-v)h^2}{10} \sum_{k=0}^{l_n} q_{\lambda_n-2k-1} f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1} \{ ((k-2\lambda_n+(-1)^n k)(k+1) + \lambda_n(\lambda_n+1)) \sin \varphi(\lambda_n+1) \\ &\quad - \lambda_n(\lambda_n-2k-1) \sin \varphi(\lambda_n-2k-1) \}, \\ m_{r\varphi} &= -D \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n-1} \left\{ a_n (F_{r\varphi}^{(n)} + R_{r\varphi}^{(n)}) + b_n (G_{r\varphi}^{(n)} + S_{r\varphi}^{(n)}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

$$\begin{aligned}
F_r^{(n)} &= -(1-v)\lambda_n(\lambda_n-1)\sin\varphi(\lambda_n-1) - \lambda_n(2-\lambda_n(1-v)+(-1)^n(1+v))\sin\varphi(\lambda_n+1), \\
G_r^{(n)} &= -(1-v)\lambda_n(\lambda_n-1)\cos\varphi(\lambda_n-1) - \lambda_n(2-\lambda_n(1-v)-(-1)^n(1+v))\cos\varphi(\lambda_n+1), \\
R_r^{(n)} &= -\frac{(1-v)h^2}{10}\sum_{k=0}^{l_n} p_{\lambda_n-2k-1}f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1}\{((k-2\lambda_n-(-1)^nk)(k+1)+\lambda_n(\lambda_n+1))\sin\varphi(\lambda_n+1) \\
&\quad -(\lambda_n(\lambda_n-1)+2k(k-\lambda_n+1))\sin\varphi(\lambda_n-2k-1)\}, \\
S_r^{(n)} &= -\frac{(1-v)h^2}{10}\sum_{k=0}^{l_n} q_{\lambda_n-2k-1}f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1}\{((k-2\lambda_n+(-1)^nk)(k+1)+\lambda_n(\lambda_n+1))\cos\varphi(\lambda_n+1) \\
&\quad -(\lambda_n(\lambda_n-1)+2k(k-\lambda_n+1))\cos\varphi(\lambda_n-2k-1)\}, \\
Q_r &= -\frac{(1-v)}{2}D\sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n}\{a_n F_r^{(n)} + b_n G_r^{(n)}\}, \tag{A.81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_r^{(n)} &= \sum_{k=0}^{l_n} p_{\lambda_n-2k-1}f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1}((\lambda_n+1)\cos\varphi(\lambda_n+1)-(\lambda_n-2k-1)\cos\varphi(\lambda_n-2k-1)), \\
G_r^{(n)} &= -\sum_{k=0}^{l_n} q_{\lambda_n-2k-1}f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1}((\lambda_n+1)\sin\varphi(\lambda_n+1)-(\lambda_n-2k-1)\sin\varphi(\lambda_n-2k-1)), \\
Q_\varphi &= -\frac{(1-v)}{2}D\sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n}\{a_n F_\varphi^{(n)} + b_n G_\varphi^{(n)}\}, \tag{A.82}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\varphi^{(n)} &= -\sum_{k=0}^{l_n} p_{\lambda_n-2k-1}f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1}((\lambda_n+1)\sin\varphi(\lambda_n+1)-(\lambda_n+1)\sin\varphi(\lambda_n-2k-1)), \\
G_\varphi^{(n)} &= -\sum_{k=0}^{l_n} q_{\lambda_n-2k-1}f_{k+1}^{\lambda_n-2k-1}((\lambda_n+1)\cos\varphi(\lambda_n+1)-(\lambda_n+1)\cos\varphi(\lambda_n-2k-1)).
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten aus den beiden Darstellungsformen lassen sich ineinander umrechnen. So gilt zum Beispiel für die ersten beiden Terme folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_1^{(A)} \\ b_1^{(A)} \end{bmatrix} &= \frac{(1-v)}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{h}{\pi\sqrt{10}}}\begin{bmatrix} a_{-\frac{1}{2}}^{(C)} \\ b_{-\frac{1}{2}}^{(C)} \end{bmatrix}, \\
a_2^{(A)} &= \frac{(1-v)}{8}a_0^{(C)},
\end{aligned} \tag{A.83}$$

wobei der obere Index (A) für die Lösung nach der Gl. (A.75) bis (A.82) und der Index (C) für die Lösung nach der Gl. (A.60) bis (A.67) steht. Daraus lassen sich auch die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_1(z)$ ,  $K_2(z)$  und die konstante Spannung parallel zum Rissufer  $B_R(z)$  auf folgende Weise definieren:

$$\begin{aligned}
K_1(z) &= -\frac{Ez}{(1-v)}\sqrt{2}a_1^{(A)}, \\
K_2(z) &= \frac{Ez}{(1-v)}\sqrt{2}b_1^{(A)}, \\
\sigma_{xx}^{(2)} &= B_R(z) = -4\frac{Ez}{(1-v)}a_2^{(A)}.
\end{aligned} \tag{A.84}$$

Bemerkenswert ist, dass die Definition der  $B_K(z)$  nach der KIRCHHOFFschen (Gl. (4.8)) und  $B_R(z)$  nach MINDLINschen Plattentheorie (Gl. (A.84)) übereinstimmt. Für  $z = h/2$  an der Plattenoberfläche ergibt sich aus der Gl. (A.84):

$$\begin{aligned}
K_1 &= -\frac{Eh}{\sqrt{2}(1-\nu)} a_1^{(A)}, \\
K_2 &= \frac{Eh}{\sqrt{2}(1-\nu)} b_1^{(A)}, \\
B_R &= -2 \frac{Eh}{(1-\nu)} a_2^{(A)}.
\end{aligned} \tag{A.85}$$

Vergleicht man den ersten Term ( $n = 1$ ) für die Scheibenlösung Gl. (2.63) mit dem ersten Term der Plattenlösung (Gl. (4.16) mit  $z = h/2$  und  $\varphi = 0$  unter Berücksichtigung Gl. (A.83) und Gl. (A.85)), so ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen den beiden Spannungsintensitätsfaktoren  $K_1$  und  $K_I$  zu:

$$K_1 = \sqrt{\pi} K_I. \tag{A.86}$$

## Literaturverzeichnis

- [1] KAMLEITNER A., FABER T., STAROSSEK U., "Einsatz bruchmechanischer Methoden zur Bestimmung der Restnutzungsdauer von Windenergieanlagen," *Stahlbau*, vol. 74, no. 6, pp. 399-405, 2005.
- [2] RAGHAVAN A., CESNIK C. E. S., "Review of guided-wave structural health monitoring," *The Shock and vibration digest*, vol. 39, no. 2, pp. 91-114, 2007.
- [3] ZHAO X., KWAN C., LUK K. M., "16th World Conference on Nondestructive Testing," in *Wireless non-destructive inspection of aircraft wing with ultrasonic guided waves*, Montreal, 2004.
- [4] ROSE J. L., SOLEY L. E., "Ultrasonic guided waves for the detection of anomaly in aircraft components," *Materials Evaluation*, vol. 58, no. 9, pp. 1080-1086, 2000.
- [5] CHO H., LISSENDEN C. J., "Structural health monitoring of fatigue crack growth in plate structures with ultrasonic guided waves," *Structural Health Monitoring*, vol. 11, no. 4, pp. 393-404, 2012.
- [6] KWUN H., LIGHT G. M., KIM S. Y., R. L. SPINKS, "Magnetostrictive sensor for active health monitoring in structures," in *SPIE Proceedings-International Society for Optical Engineering*, 4702, 2002, pp. 282-288.
- [7] ZHOU L., YANG Y., YUAN F.-G., "Design of a magnetostrictive sensor for structural health monitoring of non-ferromagnetic plates," *Journal of Vibroengineering*, vol. 14, no. 1, pp. 280-291, 2012.
- [8] GAMA A. L., MORIKAWA S. R. K., "Monitoring Fatigue Crack Growth in Compact Tension Specimens Using Piezoelectric Sensors," *Experimental Mechanics*, vol. 48, no. 2, pp. 247-252, 2008.
- [9] KUROSAKI S., SUZUKI T., KUSUDA M., "The Fatigue Crack Propagation Monitoring by Using Piezo Electric Polymer Film," *Research Reports of Tokyo National College of Technology*, vol. 33, no. 2, pp. 45-48, 2002.
- [10] DALLY J. W., SANFORD R. J., "Measuring the Stress Intensity Factor for Propagating Cracks with Strain Gages," *Journal of Testing and Evaluation*, vol. 18, no. 4, pp. 240-249, 1990.
- [11] PUTRA I. S., "Some experiences in using the K-gage to measure stress intensity factors," in *Proceedings of Damage and Fracture Mechanics*, Montreal, 2000, pp. 83-92.
- [12] MARUR P. R., TIPPUR H. V., "A Strain Gage Method For Determination Of Fracture Parameters In Bimaterial Systems," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 64, no. 1, pp. 87-104, 1999.
- [13] LU H., CHIANG F. P., "Photoelastic determination of stress intensity factor of an interfacial crack in a bi-material," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 60, no. 1, pp. 93-100, 1993.
- [14] SINGH R. P., SHUKLA A., "Characterization of isochromatic fringe patterns for a dynamically propagating interface crack," *International Journal of Fracture*, vol. 76, no. 4, pp. 293-310, 1986.

- [15] MONTEIRO J. M., VAZ M. A. P., MELO F. Q., GOMES J. F. S., "Use of interferometric techniques for measuring the displacement field in the plane of a part-through crack existing in a plate," *International journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 78, no. 4, pp. 253-259, 2001.
- [16] SHOZU M., IKEDA R., HIROSE Y., "Measurement of Stress Intensity Factor K under Mode I, II and III Loadings by Caustics Method," in *Proceedings of the Symposium on X-Ray Studies on Mechanical Behavior of Materials*, 2002, pp. 123-127.
- [17] HONDA T., SASAKI T., YOSHIHISA E., "A study to improve the measurement accuracy of stress intensity factor by the infrared method," *Damage and Fracture Mechanics VII*, vol. 37, 2002.
- [18] ROUX S., HILD F., "Stress intensity factor measurements from digital image correlation: post-processing and integrated approaches," *International Journal of Fracture*, vol. 140, no. 1-4, pp. 141-157, 2006.
- [19] DURIF E., RÉTHORÉ J., COMBESCURE A., FREGONESE M., CHAUDET P., "Controlling Stress Intensity Factors During a Fatigue Crack Propagation Using Digital Image Correlation and a Load Shedding Procedure," *Experimental Mechanics*, vol. 52, no. 8, pp. 1021-1031, 2012.
- [20] SAKA M., NAKAYAMA M., KANENKO T., ABE H., "Measurement of Stress-intensity Factor by Means of. A-C Potential Drop Technique," *Experimental Mechanics*, vol. 31, no. 3, pp. 209-212, 1991.
- [21] FUJIMOTO Y., LIU G., TANAKA Y., IM E., "Stress intensity factor measurement of cracks using a piezoelectric element," *Experimental Mechanics*, vol. 44, no. 3, pp. 320-325, 2004.
- [22] FUJIMOTO Y., SHINTAKU E., PIRKER G., TANAKA Y., "Stress Intensity Factor Measurement of Two-Dimensional Cracks by Use of Piezoelectric Sensor," *JSME International Journal Series A*, vol. 46, no. 4, pp. 567-574, 2003.
- [23] CADY W. G., *Piezoelectricity*. New York: McGraw-Hill, 1946.
- [24] STOLL B., "Zur Entstehung des starken piezoelektrischen Effekts in Polyvinylidenfluorid," *Colloid & Polymer Science*, vol. 256, no. 6, pp. 521-525, 1978.
- [25] KAWAI H., "The piezoelectricity of poly(vinylidene fluoride)," *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 8, no. 7, pp. 975-976, 1969.
- [26] LOVINGER A. J., "Ferroelectric Polymers," *Science*, vol. 220, no. 4602, pp. 1115-1121, 1983.
- [27] GERHARD-MULTHAUPT R., "Less can be more. Holes in polymers lead to a new paradigm of piezoelectric materials for electret transducers," *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, vol. 9, no. 5, pp. 850-859, 2002.
- [28] SOMMERFELD A., *Elektrodynamik, Vorlesungen über Theoretische Physik*, 3rd ed. Frankfurt/M: Verlag Harri Deutsch, 1988.
- [29] POWELL R. C., *Symmetry, Group Theory, and the Physical Properties of Crystals*. New

York Dordrecht Heidelberg London: Springer-Verlag, 2010.

- [30] RUSCHMEYER K., *Piezokeramik*. Renningen-Malmsheim: Expert-Verlag, 1995.
- [31] CHU P.-Y., HSIEH C.-S., "The piezoelectric Properties of Low-Temperature Sintered PNN-PZT-Based Ceramics and their Applications," *Integrated Ferroelectrics*, vol. 24, no. 1-4, pp. 121-127, 1999.
- [32] DANZ R., GEISS D., "Struktur und Eigenschaften piezo- und pyroelektrischer Polymerfolien," *Acta Polymeria*, vol. 38, no. 6, pp. 399-406, 1987.
- [33] MATSUMOTO E. et al., "Surface strain sensing with polymer piezoelectric film," *NDT & E International*, vol. 37, no. 1, pp. 57-64, 2004.
- [34] BOVTUN V. et al., "EMFIT Ferroelectret Film Transducers for non-Contact Ultrasonic Testing," *Applied Physics A: Materials Science & Processing*, vol. 88, no. 4, pp. 737-743, 2007.
- [35] SIDORKIN A. S., *Domain Structure in Ferroelectrics and Related Materials.*: Cambridge International Science Publishing, 2006.
- [36] MOULSON A. J., HERBERT J. M., *Electroceramics: Materials, Properties, Applications*, 2nd ed. Chichester, UK: John Wiley and Sons Ltd., 2003.
- [37] LINES M. E., GLASS A. M., *Principles and Applications of Ferroelectrics and Related Materials*. Oxford: Clarendon Press, 1977.
- [38] JOSHI J. C., DAWAR A. L., "Pyroelectric Materials, Their Properties and Applications," *physica status solidi (a)*, vol. 70, no. 2, pp. 353-369, 1982.
- [39] MURALT P., "Pyroelectricity," in *Encyclopedia of Condensed Matter Physics, Vol. 4*. Oxford: Elsevier Ltd., 2005, pp. 441-448.
- [40] ROH Y., VARADAN V. V., VARADAN V. K., "Characterization of All the Elastic, Dielectric, and Piezoelectric Constants of Uniaxially Oriented Poled PVDF Films," *IEEE Transaction On Ultrasonics, Ferroelectrics, And Frequency Control*, vol. 49, no. 6, pp. 836-847, June 2002.
- [41] LANDAU L. D., LIFSCHITZ E. M., "Klassische Feldtheorie," in *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Berlin: Akademie-Verlag, 1992.
- [42] LEHNER G., *Elektromagnetische Feldtheorie*, 6th ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [43] ERINGEN A. C., *Mechanics of Continua*, 2nd ed. Huntington New York: E. Krieger Publ. Co., 1980.
- [44] BETTEN J., *Kontinuumsmechanik*, 2nd ed. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2001.
- [45] LANDAU L. D., LIFSCHITZ E. M., *Elastizitätstheorie*. Berlin: Akademie-Verlag, 1991.
- [46] MANG H., HOFSTETTER G., *Festigkeitslehre*. Wien New York: Springer-Verlag, 2000.

- [47] STEPHAN K., MAYINGER F., *Thermodynamik, Band 1: Grundlagen und technische Anwendungen*. Berlin Heidelberg New York London Paris Tokio: Springer Verlag, 1990.
- [48] STEPHAN K., MAYINGER F., *Thermodynamik, Band 2: Mehrstoffsysteme und chemische Reaktionen*. Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo: Springer Verlag, 1988.
- [49] PARTON V. Z., KUDRYAVTSEV B. A., *Electromagnetoelasticity: Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1988.
- [50] NYE J. F., *Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices*, Oxford University Press, Ed., 1985.
- [51] YANG J., *An Introduction to the Theory of Piezoelectricity*. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [52] MEITZLER A. H. et al., *IEEE Standard on Piezoelectricity*. New York: IEEE, 1988.
- [53] ANDERSON T. L., *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, 2nd ed. Boca Raton, London, New York, Washington D. C.: CRC Press, 1995.
- [54] GROSS D., SEELIG T., *Bruchmechanik*, 4th ed. Berlin Heidelberg New York: Springer, 2007.
- [55] SAXENA A., *Nonlinear Fracture Mechanics for Engineers*. Boca Raton Boston London New York Washington D. C.: CRC Press, 1998.
- [56] MELESHKO V. V., "Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 56, no. 1, pp. 33-85, 2003.
- [57] BOCK S., *Über funktionstheoretische Methoden in der räumlichen Elastizitätstheorie*, 2009, Dissertation.
- [58] KUNA M., *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen*, 1st ed. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.
- [59] MUSKHELISHVILI N. I., *Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie*.: Fachbuchverlag Leipzig, 1971.
- [60] SAVIN G., *Spannungserhöhung am Rande von Löchern*. Berlin: VEB Verlag Technik, 1956.
- [61] MURAKAMI Y., *Stress Intensity Factors Handbook Vol. 1*. Oxford: Pergamon Books Ltd., 1987.
- [62] MURAKAMI Y., *Stress Intensity Factors Handbook Vol. 2*. Oxford: Pergamon Books Ltd., 1987.
- [63] GOURSAT E., *Course in Mathematical Analysis Volume II Part I*. Boston New York Chicago London Atlanta Dallas Columbus San Francisco, USA: Ginn & Company, 1916.
- [64] SMIRNOW W. I., *Lehrgang der höheren Mathematik, Teil III, 2*, 6th ed. Berlin: Dt. Verl. d. Wiss., 1989.

- [65] CARATHEODORY C., *Conformal Representation.*: Dover Publications, 1998.
- [66] BIEBERBACH L., *Conformal Mapping*. New York: Chelsea Publishing Company, 1964.
- [67] FREITAG E., BUSAM R., *Funktionentheorie I*, 4th ed. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [68] WILLIAMS M. L., "On the stress distribution at the base of a stationary crack," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, no. 1, pp. 109-114, 1957.
- [69] REISSNER E., "On the theory of bending of elastic plates," *Journal of mathematics and physics*, vol. 23, pp. 184-191, 1944.
- [70] REISSNER E., "On the theory of transverse bending of elastic plates," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 12, no. 8, pp. 545-554, 1976.
- [71] MINDLIN R. D., "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, no. 1, pp. 31-38, 1951.
- [72] WANG C. M., LIM G. T., REDDY J. N., LEE K. H., "Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories," *Engineering Structures*, vol. 23, no. 7, pp. 838-849, 2001.
- [73] PANC V., *Theories of elastic plates*. Leyden: Nordhoff Int. Publ., 1975.
- [74] GÖLDNER H., *Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre*. Leipzig: Fachbuchverlag Leipzig, 1991.
- [75] SIH G. C., PARIS P. C., ERDOGAN F., "Crack-Tip, Stress-Intensity Factors for Plane Extension and Plate Bending Problems," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 29, no. 2, pp. 306-312, 1962.
- [76] ALTENBACH H., ALTENBACH J., NAUMENKO K., *Ebene Flächentragwerke*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1998.
- [77] RIEDER A., *Keine Probleme mit inversen Problemen*, 1st ed.: Fried. Vieweg & Sohn Verlag, 2003.
- [78] SEIDMAN T. I., VOGEL C. R., "Well posedness and convergence of some regularisation methods for non-linear ill posed problems," *Inverse Problems*, vol. 5, no. 2, pp. 227-238, 1989.
- [79] ENGL H. W., KUNISCH K., NEUBAUER A., "Convergence rates for Tikhonov regularisation of non-linear ill-posed problems," *Inverse Problems*, vol. 5, no. 4, pp. 523-540, 1989.
- [80] BERTSIMAS D., TSITSIKLIS J., "Simulated Annealing," *Statistical Science*, vol. 8, no. 1, pp. 10-15, 1993.
- [81] WEICKER K., *Evolutionäre Algorithmen*, 2nd ed. Wiesbaden: Teubner, 2007.
- [82] MORE J. J., "The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory," in *Numerical analysis (Proc. 7th Biennial Conf., Univ. Dundee, 1977), Lecture Notes in Math., Vol. 630*, vol. 630, Dundee, 1978, pp. 105-116.



- [83] BRENT R. P., *Algorithms for Minimization without Derivatives*. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- [84] GEGENFURTNER K. R., "Praxis: Brent's algorithm for function minimization," *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers*, vol. 24, no. 4, pp. 560-564, 1992.
- [85] XIA Y., FENG G., "A new neuronal network for solving nonlinear projection equations," *Neuronal Network*, vol. 20, no. 5, pp. 577-589, 2007.
- [86] NGUYEN T. T., "Neuronal network architecture for solving nonlinear equation systems," *ELECTRONICS LETTERS*, vol. 29, no. 16, pp. 1403-1405, 1993.
- [87] ZELL A., et al., *SNNS Stuttgart Neuronal Network Simulator, User Manual*, 41st ed. Stuttgart: Institute for parallel distributed high performance systems, 1995.
- [88] SCHIESSLE E., *Sensortechnik und Meßwertaufnahme*. Würzburg: Vogel Buchverlag, 1992.
- [89] RAINER P., *Messtechnik : Grundlagen und Anwendungen der elektrischen Messtechnik für alle technischen Fachrichtungen und Wirtschaftsingenieure*, 5th ed. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2010.
- [90] RICOEUR A., BÄCKER D., KUNA M., "In-situ determination of stress intensity factors for the prediction of fatigue crack growth using piezoelectric polymer coatings.," *Proceeding of SPIE*, vol. 7647, 764724, 2010.
- [91] BÄCKER D., RICOEUR A., KUNA M., "Ein Sensorkonzept auf der Basis piezoelektrischer PVDF-Folien zu Messung bruchmechanischer Beanspruchungsgrößen," *Materials Testing*, vol. 52, no. 5, pp. 292-299, 2010.
- [92] BÄCKER D., RICOEUR A., KUNA M., "Sensor concept based on piezoelectric PVDF films for the structural health monitoring of fatigue crack growth," *SDHM*, vol. 7, no. 1, pp. 1-22, 2011.
- [93] BÄCKER D., HÄUSLER C., KUNA M., "Piezoelectric sensor for in situ measurement of stress intensity factors," *Proceedings of SPIE*, vol. 7981, 79812T, 2011.
- [94] BÄCKER D., HÄUSLER C., KUNA M., "Piezoelektrische Polyvinylidenfluorid Folien zur Messung bruchmechanischer Kenngrößen," *tm-Technisches Messen*, vol. 78, no. 6, pp. 293-303, 2011.
- [95] WILLIAMS M. L., "The bending stress distribution at the base of a stationary crack," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 28, no. 1, pp. 78-82, 1961.
- [96] HUI C. Y., ZEHNDER A. T., "A theory for fracture of thin plates subjected to bending and twisting moments," *International Journal of Fracture*, vol. 61, no. 3, pp. 221-229, 1993.
- [97] HARTRANFT R. J., SIH G. C., "Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks," *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 47, no. 3, pp. 276-291, 1968.
- [98] KNOWLES J. K., WANG N. M., "On the bending of an elastic plate containing a crack," *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 39, no. 5, pp. 223-236, 1960.

- [99] SU R. K. L., LEUNG A. Y. T., "Mixed Mode Cracks in Reissner Plates," *International Journal of Fracture*, vol. 107, no. 3, pp. 235-257, 2001.
- [100] MCGEE O. G., KIM J. W., LEISSA A. W., "Sharp Corner Functions for Mindlin Plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 72, no. 1, pp. 1-9, 2005.
- [101] IRWIN G. R., "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, no. 3, pp. 361-364, 1957.
- [102] FEARING R. S., "Tactile Sensing Mechanisms," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 9, no. 3, pp. 3-23, 1990.
- [103] SAAD E. R., BONEN A., SMITH K. C., BENHABIB B., "Tactile Sensing," in *The Measurement, Instrumentation and Sensors Handbook*, J., G. WEBSTER, Ed.: CRC Press Eds., 1999, pp. 624-640.
- [104] KRISHNA G. M., RAJANNA K., "Tactile sensor based on piezoelectric resonance," *IEEE Sensors Journal*, vol. 4, no. 5, pp. 691-697, 2001.
- [105] MALUCHE O., "Experimentelle Bestimmung bruchmechanischer Kenngrößen und Risslagen," TU Freiberg, Diplomarbeit 2010.
- [106] HÄUSLER C., *Rissspitzenfelder und Intensitätsparameter für Grenzflächenrisse im Rahmen der linearen elektro-elastischen Bruchmechanik.*: Dissertation TU Dresden, 2008.
- [107] RICE J. R., "Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 55, no. 1, pp. 99-103, 1988.
- [108] POLJANIN A. D., *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists*. Boca Raton: Chapman & Hall, 2002.